



**Titre:** Modélisation et optimisation d'isolateurs non-linéaires en  
Title: élastomères

**Auteur:** Joël Chamberland-Lauzon  
Author:

**Date:** 2010

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Chamberland-Lauzon, J. (2010). Modélisation et optimisation d'isolateurs non-  
Citation: linéaires en élastomères [Mémoire de maîtrise, École Polytechnique de Montréal].  
PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/479/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**  
Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/479/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de  
recherche:** Annie Ross  
Advisors:

**Programme:** Génie mécanique  
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

MODÉLISATION ET OPTIMISATION D'ISOLATEURS NON-LINÉAIRES EN  
ÉLASTOMÈRES

JOËL CHAMBERLAND-LAUZON  
DÉPARTEMENT DE GÉNIE MÉCANIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MÉMOIRE PRÉSENTÉ EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLOME DE MAÎTRISE ÈS SCIENCES APPLIQUÉES  
(GÉNIE MÉCANIQUE)  
DÉCEMBRE 2010

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Ce mémoire intitulé :

MODÉLISATION ET OPTIMISATION D'ISOLATEURS NON-LINÉAIRES EN  
ÉLASTOMÈRES

présenté par : CHAMBERLAND-LAUZON Joël

en vue de l'obtention du diplôme de : Maîtrise ès Sciences Appliquées

a été dûment accepté par le jury constitué de :

M. SANSCHAGRIN, Bernard, D.ing., président.

Mme. ROSS, Annie, Ph.D., membre et directrice de recherche.

M. GAUDREAU, Roch, Ing., membre.

*À ma Jasmine, Serge et Hugo  
car la famille est ce qu'il y a  
de plus précieux . . .*

*Tu viendras toute ensoleillée d'existence  
la bouche envahie par la fraîcheur des herbes  
le corps mûri par les jardins oubliés . . .  
(Gaston Miron)*

## Remerciements

Je tiens d'abord à remercier le Pr. Annie Ross, ma directrice de recherche, qui grâce à sa grande disponibilité et son enthousiasme légendaire m'aura permis de traverser les moments plus difficiles de ces deux dernières années. Elle m'aura aussi, par sa confiance, permis d'enrichir mon parcours de maîtrise de volets sociaux tel que l'implication étudiante et l'enseignement. En plus des apprentissages techniques, elle a su m'inculquer un plus grand souci d'exactitude et de meilleures aptitudes en communication : ce qui dans mon cas n'est pas peu dire. Pour Annie, le travail n'empêche pas le plaisir, j'imagine que c'est le lot des passionnés et cette passion est contagieuse.

Je tiens également à remercier nos partenaires industriels Soucy Baron Inc, plus particulièrement les membres du département de l'ingénierie : Roch Gaudrau, Martine Lavoie et Simon Rioux. Tout au long du projet ils ont su demeurer très disponibles malgré les aléas de la production et des requis de la vie industrielle. Ils ont aussi su amener des considérations pratiques et de fortes connaissances techniques qui furent essentielles à la réussite de ce projet. Je les remercie également, ainsi que le CRSNG, pour le financement de ce projet.

De plus, je tiens à saluer tous mes collègues et stagiaires qui ont su rendre mon passage à la section de mécanique appliquée des plus agréables : Romain, Thomas, Cédric, Valérie, Sara, Philpipe, Ti-Loup, Xavier, Amine, Patrick, Nicolas, Sophie et sans oublier notre Ben national chez qui les compétences et le sens de l'humour semblent ne pas avoir de limites. J'offre une salutation particulière à Matthieu Sola un partenaire de café et un quart-arrière hors pair.

Merci au comité exécutif de l'AÉCSP année 2008-2009 pour l'année enrichissante. Je demeure toujours étonné que 7 individus aux personnalités si différentes se sont si rapidement liés d'amitié : merci à Christine, Marc-Alexandre, Maléna, Amandine, Jonathan et Amélie.

Merci à Jean-François pour ...être JF : passionné, d'une intelligence intimidante, patient et possédant un sens de l'humour décapant, bref, merci pour tous tes coups de pouces et ton amitié. Merci à Isabelle, ma confidente et mon amie qui m'aura apporté son support au moment où j'en avais le plus besoin.

Je m'en voudrais de conclure cette section sans saluer le travail colossal qu'a accompli

avant moi Martine Lavoie, collègue et amie. Les premiers pas de ce projet ont été possibles grâce à la forte contribution de Martine.

## Résumé

Les principal objectif de cette recherche est de développer un module numérique d'optimisation de système de supports de moteurs. La méthode de design proposée permet d'obtenir rapidement des valeurs cibles de raideur des supports. Cette méthode constitue la première itération du processus de design d'un support de moteur et permet de limiter le nombre d'itérations ou de prototypes nécessaires à la conception des supports.

La pièce de caoutchouc a été caractérisée expérimentalement à l'aide d'une machine de traction harmonique. La pièce est caractérisée pour une vaste gamme de fréquences, d'amplitudes et d'orientations pour permettre de représenter le comportement de la pièce *in situ*. Des différences de raideur (20 à 30%) et d'amortissement (90%) sont observées selon la fréquence et l'amplitude de sollicitation. Les courbes expérimentales de la raideur et de l'amortissement sont exprimées en fonction des différents paramètres de caractérisation. Les courbes proposées possède une très forte corrélation avec les résultats expérimentaux.

Une nouvelle méthode d'obtention des forces générées par le fonctionnement du moteur a été proposée par Martine Lavoie (2009). Cette méthode consiste à remplacer les isolateurs par des capteurs de forces en plus d'instrumenter les points d'attache du moteur avec des accéléromètres. Les forces mesurées sont corrigées par le calcul des pseudo-forces inertielles. Dans le présent mémoire, la méthode est améliorée pour mieux tenir compte des rotations du moteur : les mouvements du moteur sont déterminés par la méthode des moindres carrés et les forces sont corrigées en utilisant les propriétés d'un seul corps rigide.

Un modèle du moteur et de ses supports est construit en se basant sur les équations dynamiques d'un corps rigide supporté par des éléments déformables. Les courbes expérimentales caractérisant le comportement non-linéaire des supports sont utilisées dans le modèle. Le modèle construit dans le domaine des fréquences permet de tenir compte de certains phénomènes propres au domaine du temps, à savoir : le comportement d'une structure non-linéaire sous l'effet de forces à plusieurs fréquences et l'effet de saut à la résonance. Il est démontré que le modèle non-linéaire permet d'évaluer les fréquences naturelles avec beaucoup plus de précision qu'un modèle linéaire classique. De plus, le modèle non-linéaire permet de mieux refléter le couplage entre les modes et les déformées *in situ*.

Une série d'optimisations de la raideur des supports est réalisée à partir du modèle non-

linéaire du caoutchouc. L'hypothèse que les composantes non-linéaires des supports sont proportionnelles à la raideur statique est utilisée. La correspondance directe entre la contribution de raideur nominale et les termes de non-linéarité a d'ailleurs été observée expérimentalement. La performance de trois critères d'optimisation est analysée, soit : le découplage des modes, la limitation de la corrélation entre les forces et les modes, puis la limitation de la corrélation avec évitement de fréquences à problèmes. Les résultats obtenus sont proches de la solution actuellement retenue par le fabricant du véhicule. Étant donné que les propriétés du support actuellement utilisé sont jugés adéquates par le fabricant et son client, il est possible de conclure que la solution issue de l'optimisation est valable.. D'autres validations seront cependant nécessaires pour certifier définitivement la méthode d'optimisation.

Une étude de sensibilité sur les solutions de l'optimisation a été réalisée. Il s'avère que l'algorithme tend à converger vers des plages de solutions robustes. Même si les valeurs retenues ne sont pas nécessairement les plus performantes. En pratique, la fabrication d'un nouveau support ne permet pas d'obtenir une raideur très précise. Il est donc nécessaire d'éviter des solutions pour lesquelles des valeurs avoisinantes de raideurs mèneraient à des performances nettement moins efficaces du système de tampons d'ancrage du moteur.



## Abstract

The main purpose of this research is to develop a numeric tool to optimise engine mounting systems. The design method proposed is intended to be the first step of the design of new engine mounts and reduce the number of iterations and prototypes.

A selected engine mount was characterized using a harmonic traction machine. The engine mount was tested over a wide range of deformations, frequencies and orientations according to observations on the vehicle. Depending on the frequencies and the displacements, significant differences in the stiffness (20-30%) and damping (90%) are observed. The experimental data is fitted with mathematical expressions with good correlation..

A new way to obtain the forces exerted by the engine on his mounts was proposed by M.Lavoie (2009). The engine mounts are replaced by force sensors and the attachment points of the engine are instrumented with accelerometers. The measured forces are corrected by the computed inertial pseudo-forces. This method was improved in the present thesis to have a better handle the computation of moments. The engine motions are determined using a least squares formulation and using the inertial properties of the engine.

An analytical modeling of the engine is carried out using the dynamics of a rigid body supported by flexible elements. The non-linear rubber mounts properties are included in model using the experimental curves for stiffness and damping. The frequency domain model can handle time domain observed phenomenons such as combinatory effects of multiples input forces and jump effect at resonance. It is shown that the non linear model evaluates the natural frequencies and the coupling between modes with better precision than a linear model.

Some optimisations are carried out using the non linear model. The hypothesis that the non linear terms are proportional to the linear terms is used. This hypothesis was observed experimentally. Three optimisation criteria are used : modes decoupling, limitation of the correlation between natural modes and engine forces and limitation of the correlation with frequency avoidance. The results and the performance level are close to the solution that was implemented using the proposed optimisation method. Some more validations for different cases are needed to fully qualify the process.

A sensitivity study on the possible solutions is conducted. The algorithm tends to con-

verge to robust areas which are not necessarily the optimal solutions. In reality, it is not possible to obtain precise stiffness values with the manufacturing process. Then it is mandatory to avoid surrounding values that will lead to a much less effective engine mounting design.

## Table des matières

Dédicace . . . . .	iii
Remerciements . . . . .	iv
Résumé . . . . .	vi
Abstract . . . . .	viii
Table des matières . . . . .	x
Liste des tableaux . . . . .	xiii
Liste des figures . . . . .	xiv
LISTE DES ANNEXES . . . . .	xvii
Liste des sigles et abréviations . . . . .	xviii
CHAPITRE 1 INTRODUCTION . . . . .	1
CHAPITRE 2 REVUE CRITIQUE DE LITTÉRATURE . . . . .	3
2.1 Modélisation d'un système d'ancrage de moteur . . . . .	3
2.1.1 Définitions et axes . . . . .	4
2.1.2 Modèle du moteur . . . . .	5
2.1.3 Modélisation du châssis . . . . .	7
2.1.4 Paramètres considérés . . . . .	9
2.2 Modélisation du caoutchouc . . . . .	10
2.2.1 Modèle de Kelvin-Voigt . . . . .	10
2.2.2 Modélisation non-linéaire . . . . .	11
2.2.3 Modélisation de la dépendance à la fréquence . . . . .	12
2.2.4 Modélisation de la dépendance à l'amplitude . . . . .	13
2.2.5 Les séries de Prony . . . . .	14
2.2.6 Modèles de matériaux pour logiciel FEA . . . . .	15
2.2.7 Modélisation de la dépendance à l'angle de sollicitation . . . . .	16
2.3 Méthodes expérimentales . . . . .	17
2.3.1 La méthode des FRF . . . . .	17

2.3.2	Méthode des capteurs de force . . . . .	18
2.3.3	Identification de l'inertie du moteur . . . . .	19
2.4	Méthodes d'optimisation . . . . .	20
2.4.1	La méthode de focalisation . . . . .	20
2.4.2	Force et énergie transmise . . . . .	21
2.4.3	Découplage de l'axe de torsion . . . . .	22
CHAPITRE 3	Démarche du projet . . . . .	24
CHAPITRE 4	Travaux expérimentaux . . . . .	27
4.1	Analyse dynamique du véhicule . . . . .	27
4.1.1	Reconstruction des forces . . . . .	27
4.1.2	Fonctions de transfert . . . . .	34
4.1.3	Identification des modes . . . . .	37
4.1.4	Sources d'erreurs . . . . .	38
4.2	Conclusion de la section expérimentale . . . . .	39
CHAPITRE 5	Caractérisation du caoutchouc . . . . .	41
5.1	Rigidité en fonction de la fréquence . . . . .	41
5.2	Rigidité en fonction de l'orientation . . . . .	42
5.3	Rigidité en fonction de l'amplitude . . . . .	43
5.4	Amortissement en fonction de l'amplitude . . . . .	44
5.5	Représentation dynamique des supports . . . . .	46
5.6	Phénomènes vibratoires non-linéaires . . . . .	48
5.6.1	Comportement sous sollicitation multi-fréquentielle . . . . .	48
5.6.2	Résonance d'un système non-linéaire . . . . .	50
5.7	Conclusion de la section expérimentale . . . . .	52
CHAPITRE 6	Modélisation et optimisation . . . . .	53
6.1	Structure et paramètres du modèle . . . . .	53
6.1.1	Structure de l'algorithme de calcul . . . . .	53
6.1.2	Paramètres et dimensions . . . . .	54
6.2	Validation du modèle . . . . .	56
6.2.1	Comparaison du modèle avec la littérature . . . . .	56
6.2.2	Comparaison des fréquences naturelles . . . . .	57
6.2.3	Comparaison des fonctions de transfert . . . . .	59
6.2.4	Comparaison de la réponse forcée . . . . .	61

6.2.5	Effet de l'amplitude . . . . .	61
6.2.6	Détermination des conditions d'utilisation du véhicule . . . . .	64
6.3	Algorithme d'optimisation . . . . .	64
6.3.1	Description de l'algorithme . . . . .	65
6.4	Optimisations . . . . .	67
6.4.1	Découplage des mouvements des modes propres . . . . .	67
6.4.2	Méthode de corrélation . . . . .	69
6.4.3	Méthode de corrélation modifiée . . . . .	71
6.4.4	Étude de sensibilité . . . . .	74
6.5	Conclusion de ce chapitre . . . . .	75
CHAPITRE 7	Discussion . . . . .	77
7.1	Caractérisation du caoutchouc . . . . .	77
7.2	Fonctions de transfert expérimentales . . . . .	78
7.3	Validation du modèle . . . . .	79
7.4	Validation de la méthode d'optimisation . . . . .	79
CHAPITRE 8	CONCLUSION . . . . .	80
8.1	Synthèse des travaux . . . . .	80
8.2	Limitations de la solution proposée . . . . .	80
8.3	Améliorations futures . . . . .	81
Références	. . . . .	83
Annexes	. . . . .	85

## Liste des tableaux

Tableau 4.1	Paramètres d'acquisition et de traitement de signal . . . . .	35
Tableau 4.2	Fréquences naturelles et déformées identifiables à partir spectres résultant d'un impact latéral . . . . .	36
Tableau 4.3	Fréquences naturelles et déformées identifiables à partir des spectres résultants d'un impact dans l'axe des pistons . . . . .	37
Tableau 4.4	Identification des fréquences naturelles et des composantes principales des déformées modales à partir des FRF expérimentales . . . . .	38
Tableau 6.1	Distance des supports de moteur par rapport au centre de masse . . .	54
Tableau 6.2	Comparaison des fréquences naturelles et des déformées modales entre les résultats expérimentaux et les résultats des modèles . . . . .	58
Tableau 6.3	Valeurs obtenues par réduction des termes diagonaux . . . . .	68
Tableau 6.4	Valeurs obtenues par la méthode de corrélation . . . . .	71
Tableau 6.5	Valeurs obtenues par la méthode de corrélation modifiée . . . . .	72
Tableau 6.6	Fréquences naturelles du système optimisé . . . . .	74
Tableau C.1	Données de masse et de rigidité du modèle de comparaison . . . . .	89
Tableau C.2	Position des supports du modèle de comparaison . . . . .	89

## Liste des figures

Figure 2.1	Système d'axes global du véhicule . . . . .	4
Figure 2.2	Système d'axes local du support . . . . .	7
Figure 2.3	Modèle tiré de Pan <i>et al.</i> (1992) . . . . .	9
Figure 2.4	Modèles de Maxwell et de Kelvin-Voigt . . . . .	11
Figure 2.5	Raideur dynamique en fonction de la fréquence pour différentes amplitudes Sjöberg (2002) . . . . .	12
Figure 2.6	Relation force déplacement d'un support en élastomère tiré de Bagley et Torrik 2008 . . . . .	14
Figure 2.7	Système de coordonnées du tampon ( $X_{ref}, Y_{ref}, Z_{ref}$ ) dans le système de coordonnées de référence du véhicule . . . . .	16
Figure 2.8	Représentation schématique de la méthode des capteurs de force . . .	19
Figure 2.9	Disposition des axes dans la méthode de focalisation tiré de Martine Lavoie 2009 . . . . .	21
Figure 4.1	Identification des supports et système d'axes utilisé dans le chapitre 4	28
Figure 4.2	Montage expérimental utilisé tiré de M.Lavoie mémoire de maîtrise .	29
Figure 4.3	Modèle CAD balancé du moteur . . . . .	30
Figure 4.4	Disposition des capteurs de force . . . . .	31
Figure 4.5	Forces reconstruites par les mesures de capteurs de force à 900 RPM	33
Figure 4.6	Moments reconstruits par les mesures de capteurs de force à 900 RPM	34
Figure 4.7	Fonctions de transfert en translation pour un impact dans l'axe principal	36
Figure 4.8	Fonctions de transfert en rotation pour un impact dans l'axe principal	37
Figure 4.9	Décompositon des forces appliquées . . . . .	39
Figure 4.10	Comparaison de la rotation en y reconstruite à partir des accélérations mesurées en x et en z . . . . .	40
Figure 5.1	Schématisation des essais de caractérisation . . . . .	41
Figure 5.2	Rigidité en fonction de l'angle et de la fréquence . . . . .	42
Figure 5.3	Rigidité en fonction de l'amplitude . . . . .	44
Figure 5.4	Rigidité des deux axes principaux du support en fonction de l'amplitude et de la fréquence . . . . .	45
Figure 5.5	Amortissement en fonction de l'angle . . . . .	46
Figure 5.6	Amortissement en fonction de l'amplitude . . . . .	47
Figure 5.7	Réponse du ressort sous l'application d'une force à une fréquence . .	49
Figure 5.8	Réponse du ressort sous l'application d'une force à deux fréquences .	49

Figure 5.9	Réponse du ressort sous l'application d'un véritable spectre de force .	50
Figure 5.10	Réponses possibles d'un système masse ressort non linéaire . . . . .	51
Figure 6.1	Structure de l'algorithme de calcul . . . . .	55
Figure 6.2	Comparaison de la réponse du système de Jeong et Singh (2000) en rotation $\theta$ suite à l'application d'un couple de 100 Nm dans l'axe $T_{ra}$	57
Figure 6.3	Comparaison des accélérations en y et en z au support arrière-gauche entre les résultats expérimentaux et les simulations . . . . .	60
Figure 6.4	Comparaison de l'accélération <i>in situ</i> en z des signaux expérimentaux (600 RPM) et numériques (RPM) . . . . .	62
Figure 6.5	Fonction de transfert en z sous l'application, dans toutes les directions et à toutes les fréquences, de forces de différentes amplitudes . . . . .	63
Figure 6.6	Spectres de forces basé sur les résultats expérimentaux et des analyses statistiques . . . . .	65
Figure 6.7	Structure de l'algorithme d'optimisation . . . . .	66
Figure 6.8	Comparaison du système optimisé par découplage des modes au système de référence . . . . .	69
Figure 6.9	Comparaison des réponses du système optimisé au système de référence et à un système non-optimisé . . . . .	72
Figure 6.10	Comparaison des fonctions de transfert du système optimisé par la méthode de corrélation modifiée et du système de référence obtenue en appliquant une force de 100N et un couple de 10N à toutes les fréquences (0-100 Hz) et dans toutes les directions . . . . .	73
Figure 6.11	Comparaison de la réponse au spectre de force du système optimisé par la méthode de corrélation et du système de référence . . . . .	73
Figure 6.12	Résultat de l'optimisation (valeur de la fonction de coût) en fonction de la raideur et de l'inverse du ratio de raideur . . . . .	76
Figure B.1	Comparaison de la fonction de transfert de l'axe x expérimentale et simulé du support arrière droit . . . . .	86
Figure B.2	Comparaison de la fonction de transfert de l'axe y expérimentale et simulé du support arrière droit . . . . .	87
Figure B.3	Comparaison de la fonction de transfert expérimentale de l'axe z et simulé du support arrière droit . . . . .	87
Figure B.4	Fonctions de transfert des déplacements dans le système d'axe global du moteur obtenus en appliquant une force de 200N et un moment de 20N dans toutes les directions . . . . .	88



Figure B.5	Fonctions de transfert des rotations dans le système d'axe global du moteur obtenus en appliquant une force de 200N et un moment de 20N dans toutes les directions . . . . .	88
Figure C.1	Fonctions de transfert de déplacements obtenues par Jeong et Singh (2000) a) x, b) y c) z . . . . .	90
Figure C.2	Fonctions de transfert des déplacements obtenus par les simulations de ce mémoire . . . . .	90
Figure C.3	Fonctions de transfert des rotations obtenues par Jeong et Singh (2000) d) $\theta$ , e) $\phi$ f) $\alpha$ . . . . .	91
Figure C.4	Fonctions de transfert de rotations obtenues par les simulations de ce mémoire . . . . .	91

**LISTE DES ANNEXES**

Annexe A	Description détaillée des tâches . . . . .	85
Annexe B	Fonctions de transferts expérimentales et simulées . . . . .	86
Annexe C	Comparaisons des simulations avec celles de Jeong et Singh (2000) . .	89
Annexe D	Scripts et codes utilisés . . . . .	92

## Liste des sigles et abréviations

### Accronymes et abréviations

<i>diag</i>	<i>Éléments diagonaux d'une matrice</i>
ÉF	<i>Éléments Finis</i>
FRF	<i>Frequency response function</i>
Mvt.	<i>Mouvement</i>
<i>ind</i>	<i>Indéfini</i>
<i>nondiag</i>	<i>termes non-diagonaux d'une matrice</i>
SBI	<i>Soucy Baron International</i>
SEA	<i>Statistical energy analysis</i>

### Système de coordonnées

q	ensemble de coordonnées globales
x	axe gauche-droite
y	axe avant-arrière
z	axe haut-bas
$\theta$	rotation autour de x
$\phi$	rotation autour de y
$\alpha$	rotation autour z
$T_{ra}$	axe d'application du couple moteur

### Variables et constantes

$a$	accélération
$A$	matrice de tenseurs vectoriels
$C$	matrice globale de l'amortissement
$f$	fréquence (Hz)
$\tilde{D}$	densité spectrale
$\epsilon$	déformation
$E$	module d'Young
$\eta$	coefficient de perte
$g_n$	terme des séries de Prony
$G_R$	rigidité en cisaillement d'un matériau
$I$	matrice identité
$I_g$	inertie en rotation

$j$	nombre imaginaire $\sqrt{-1}$
$M$	inertie totale
$M_g$	inertie en translation
$K$	matrice globale de la rigidité
$K_a$	rigidité en tension-compression
$K_r$	rigidité en cisaillement
$K_i$	matrice de rigidité d'un support
$\lambda$	valeur propre
$\phi_i$	forme d'un mode
$Q$	moment
$r$	vecteur de position
$R$	force de réaction
$\mathbf{R}$	matrice de rotation $\sigma$ contrainte de déformation
$t$	temps
$\tau_n$	temps de retard
$\theta_g$	rotation du moteur
$w$	vecteur de déplacement
$\omega$	fréquence (rad)

## Indices

a	axial
d	dynamique
g	centre de masse du moteur
i	1,2...nombre de supports
$\omega$	terme dépendant de la fréquence
p	principal
r	radial
s	statique
$\theta$	angle
x	propriété dans l'axe des x
y	propriété dans l'axe des y
z	propriété dans l'axe des z

## Autres symboles

$()^*$	raideur équivalente
$()$	$\partial()/\partial t$

$\dot{()}$

$\partial^2 l()/\partial t^2$

$\vec{()}$

vecteur

$\sum$

sommation

$()_{ab}$

termes croisé entre a et b

## CHAPITRE 1

### INTRODUCTION

Les moteurs et les machines tournantes sont des sources de vibration et de bruit nuisibles qui provoquent de l'inconfort aux humains exposés. Lorsqu'induites dans une structure, ces vibrations peuvent aussi causer des problèmes d'usure prématurée et de rupture en fatigue. Il est donc primordial dans le design d'une structure de prévoir des dispositifs permettant d'isoler les sources de vibrations pour protéger la structure et les utilisateurs. Le partenaire industriel de ce projet, Soucy Baron Inc., est un spécialiste de la fabrication de supports de moteurs en élastomères. Ces supports de moteur ont pour double objectif, d'abord de soutenir le poids du moteur mais aussi d'isoler le châssis des vibrations engendrées par le fonctionnement du moteur. La conception de ces systèmes d'isolation demeure difficile puisque ces pièces doivent satisfaire divers critères de performance et de durabilité qui sont parfois contradictoires.

La vibration du moteur transmise au châssis cause des vibrations dans l'habitacle et provoque le rayonnement acoustique. Voilà pourquoi le contrôle passif des vibrations fait l'objet de recherches depuis l'apparition des supports de moteurs en caoutchouc au début du siècle dernier. L'isolation des vibrations dues au fonctionnement du moteur doit répondre à des critères de plus en plus sévères. Les voitures et les véhicules motorisés sont soumis à des normes environnementales sur le bruit rayonné par la structure vibrante. De plus, le confort physique et acoustique des passagers est devenu un critère important de sélection, particulièrement dans le domaine automobile. Pour demeurer compétitifs les fabricants doivent sans cesse innover pour produire des véhicules plus confortables et moins bruyants.

Certains fabricants d'automobiles utilisent des systèmes d'isolation actifs ou semi-actifs. Les supports comportent souvent un fluide interne qui permet entre autres d'augmenter le facteur de perte. Ces systèmes sont cependant plus coûteux et s'adaptent mal au contexte des véhicules récréatifs - véhicules hors route ou motoneige - parce que les coûts de fabrication doivent demeurer le plus bas possible. C'est pourquoi les isolateurs en caoutchouc sont encore utilisés. Le caoutchouc permet d'obtenir à faible coût des pièces offrant une bonne résistance en fatigue et aux chocs, en plus d'être efficaces dans une vaste gamme de température et d'être chimiquement stables. Par conséquent, ces pièces répondent bien aux exigences du milieu hostile dans lequel ils sont utilisés.

Dans le contexte du véhicule récréatif, il est souhaitable d'atteindre de bonnes performances tout en respectant le contexte économique de l'industrie. Pour y parvenir, il est nécessaire de bien comprendre les phénomènes dynamiques en jeux et de développer des méthodes de design à partir de ces connaissances. À ce jour, les méthodes de design basées sur des méthodes analytiques n'ont pas tout à fait comblé les attentes des industriels, notamment parce que ces méthodes ne tiennent pas compte des non-linéarités du caoutchouc et du couplage des modes de mouvement rigide du moteur avec ceux du châssis.

L'objectif de ce travail est de développer une méthode semi-analytique de design. Pour y parvenir, le cas d'un véhicule type sera étudié. D'abord, un modèle analytique du moteur et de ses supports sera développé puis comparé aux résultats de tests expérimentaux. La plupart des méthodes actuelles de design se basent sur les analyses modales. Cependant, la sélection de fréquences naturelles et de déformées modales ne se traduit pas toujours par une meilleure performance du système d'isolation. C'est pourquoi des essais expérimentaux sont utilisés pour reconstruire les forces exercées par le moteur en régime permanent. Ces données sont utilisées dans le modèle et permettent de bien optimiser le comportement *in situ* du véhicule.

Ce mémoire est divisé en 7 chapitres. Le chapitre deux passe en revue les éléments pertinents à la modélisation, à la caractérisation et à l'optimisation de pièces en élastomères. Le troisième chapitre présente les objectifs spécifiques de ce travail ainsi que la méthode utilisée. Le chapitre 4 présente les principaux travaux expérimentaux qui ont été réalisés. Les travaux expérimentaux ont pour but d'analyser et de comprendre le comportement dynamique du moteur. Les résultats serviront de base à la validation du modèle étudié dans le chapitre 4. Le comportement non-linéaire des supports est quant à lui caractérisé et analysé au chapitre 5. Dans ce chapitre des phénomènes dus au comportement non-linéaire des supports sont modélisés. Le chapitre 6 présente un modèle basé sur les courbes de caractérisation obtenues et des optimisations sont réalisées à partir de ce modèle. Finalement, le chapitre 7 constitue une discussion sur le projet.

## CHAPITRE 2

### REVUE CRITIQUE DE LITTÉRATURE

Cette revue de la littérature démontre l'état de l'art du processus de design des supports de moteurs ainsi que le positionnement du présent travail par rapport à ce qui a été accompli jusqu'à présent. La problématique du contrôle des vibrations générées par un moteur à pistons a intéressé plusieurs chercheurs et industriels. Il est convenu et bien documenté que la stratégie utilisée pour fixer le moteur a une grande influence sur le comportement dynamique et sur les vibrations ressenties par l'utilisateur du véhicule. Le processus de design doit se baser sur une solide compréhension des phénomènes dynamiques et du comportement du caoutchouc. À partir des modèles construits, il est possible de mener une optimisation des paramètres ciblés.

Afin d'établir une méthode de design ou d'optimisation, les méthodes de modélisation des phénomènes dynamiques présentes dans la littérature sont présentées. Suivront les méthodes de caractérisation et de modélisation du caoutchouc. Puis les méthodes de design basées sur des modèles dynamiques du moteur et du caoutchouc seront présentées. Finalement, l'orientation des présents travaux sera établie à la lumière de ce qui a été présenté dans cette revue de la littérature.

#### 2.1 Modélisation d'un système d'ancrage de moteur

La modélisation du système constitué du moteur et de ses supports est nécessaire aux travaux de design et d'optimisation. Les équations dynamiques d'un tel système à 6 degrés de liberté sont assez simples. Ces équations peuvent être dérivées à partir des équations de Newton en effectuant l'équilibre des forces selon trois axes orthogonaux et l'équilibre des moments autour du centre de masse du moteur. La modélisation exacte du système d'ancrage et du véhicule est cependant beaucoup plus complexe et nécessite l'utilisation de logiciels par éléments finis ou d'une étude expérimentale poussée.



### 2.1.1 Définitions et axes

#### Le véhicule

Le système de support d'un moteur est un système à 6 degrés de liberté constitués des mouvements rigides du moteur (3 translations et 3 rotations). Afin de faciliter l'écriture des équations dynamiques, le système d'axe est positionné au centre de masse (C.M. du moteur), ce qui permet d'éliminer certains termes de la matrice de masse causées par la présence d'un débalancement. La figure 2.1 représente le système d'axes typiquement utilisé en fonction de la référence spatiale du véhicule. Le système de coordonnées présenté sera celui utilisé tout au long du mémoire

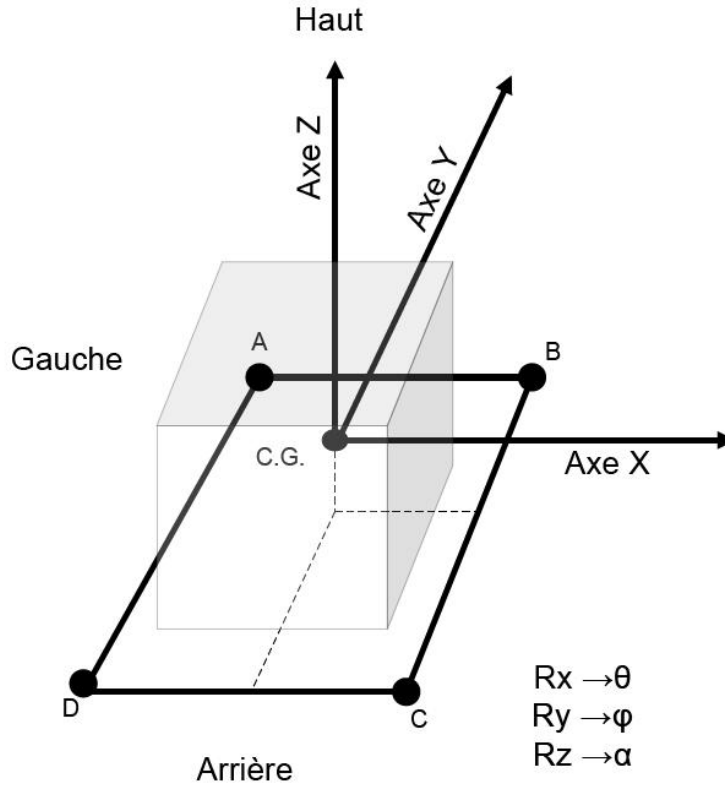


Figure 2.1 Système d'axes global du véhicule

- $\theta$  : Roullis
- $\phi$  : Tangage
- $\alpha$  : Lacet
- $T_{ra}$  : « Torque roll axis » ou axe d'application du couple moteur.

L'étude de l'axe d'application du couple moteur occupe une certaine importance dans la littérature. L'importance de cet axe est discutée dans la section optimisation (2.4) du présent chapitre.

### 2.1.2 Modèle du moteur

Les équations dynamiques du moteur sur ses supports est représenté sous la forme d'équations vectorielles. Ces équations sont vaguement utilisées dans la littérature (Park et Singh (2008) et Courteille *et al.* (2005)).

En considérant le système d'axe de la figure 2.1, les équations dynamiques sont établies pour les 6 degrés de liberté des mouvements rigides du moteur.

$$q = [x \ y \ z \ \theta \ \phi \ \alpha]^T \quad (2.1)$$

La matrice d'inertie au centre de masse est construite à partir de la masse du moteur et des moments d'inertie autour du centre de masse.

$$M_g = \begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & M \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$I_g = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

$$[M] = \begin{bmatrix} [M] & [0] \\ & [I_g] \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

La matrice de rigidité d'un tampon inclut les termes directs et croisés.

$$[K_i] = \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} & K_{xz} \\ K_{yx} & K_{yy} & K_{yz} \\ K_{zx} & K_{zy} & K_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

La force de réaction associée à la rigidité du tampon suite à un déplacement est  $[R] = -[K_i][w_i]^T$ . Le déplacement est représenté par une combinaison de translations et de rotations, de sorte que  $w_i = w_g + \theta_g \times r_g i$ . Le terme  $w_g$  correspond aux translations du centre

de masse  $(x, y, z)$  et  $\theta_g$  correspond aux trois rotations de l'ensemble de coordonnées  $q$ , soit  $(\theta, \phi, \alpha)$ .

En utilisant une matrice de tenseurs vectoriels  $A$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -r_z & r_y \\ r_z & 0 & -r_x \\ -r_y & r_x & 0 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

la somme des forces en  $x$ , en  $y$  et en  $z$  est exprimée sous forme matricielle, où  $I$  est la matrice identité.

$$[R_i] = -K_i[IA_i^T][q] \quad (2.7)$$

Les moments générés par ces forces de réaction s'expriment par le produit vectoriel :  $[Q_i] = -R_i \times r_i$ . En utilisant le tenseur vectoriel et l'équation pour les forces de réaction, on obtient l'expression des moments générés.

$$[Q_i] = -AK_i[IA_i^T][q] \quad (2.8)$$

En équilibrant les forces puis les moments générés par les déplacements du système de coordonnées par tous les supports, on obtient la matrice finale de rigidité.

$$[K] = \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} K_i & K_i A_i^T \\ (K_i A_i^T)^T & A_i K_i A_i^T \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

La matrice d'amortissement  $C$  est construite de la même façon que la matrice de rigidité puis l'équation finale du mouvement peut être établie.

$$[M]\ddot{q}(t) + [C]\dot{q}(t) + [K]q(t) = F(t) \quad (2.10)$$

Dans le domaine des fréquences, la réponse à une force harmonique sera sous la forme :  $[q]e^{j\omega}$  et l'équation du mouvement devient :

$$(-[M]\omega^2 + [C]j\omega + [K])[q] = F \quad (2.11)$$

## Le support du moteur

Chaque support du moteur placé dans le système possède son propre axe local tel qu'illustré à la Figure 2.2 .

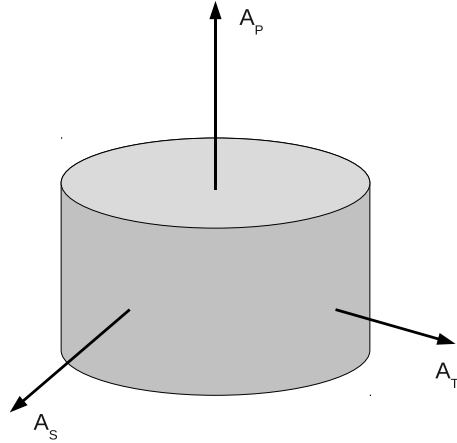


Figure 2.2 Système d'axes local du support

- Axe principal ( $A_p$ ) : axe selon lequel la raideur est la plus grande et la déformation est en tension-compression.
- Axe secondaire ( $A_s$ ) : axe de cisaillement.
- Axe tertiaire ( $A_t$ ) : axe de cisaillement perpendiculaire aux deux autres.

Dans le cas des supports de moteur axisymétriques, l'axe secondaire et l'axe tertiaire possèdent les mêmes propriétés. Dans ce cas, on caractérise la rigidité du tampon avec la rigidité axiale et le ratio des raideurs  $q = K_a/K_s$ .

### 2.1.3 Modélisation du châssis

Le châssis est une structure en acier composée de profilés auxquels sont fixés les roues, le moteur et d'autres éléments nécessaires au fonctionnement du véhicule. Dans le cas d'un véhicule tout-terrain, l'habitacle demeure assez rudimentaire et ne comporte pas d'éléments structuraux. Les profilés du châssis sont fixés entre eux par des éléments d'assemblage (écrous,

boulons, rivets) et par des soudures. Comme dans plusieurs domaines du transport, ces structures tendent à devenir de plus en plus légères tout en gardant une rigidité adéquate. L'amélioration des performances et la diminution du poids provoquent une augmentation des fréquences naturelles et rend la structure plus sensible aux forces extérieures, particulièrement les forces impulsionnelles. La modélisation du comportement du châssis devient donc un point à considérer lors du design d'un système de support de moteur.

Il est fastidieux de modéliser le châssis en entier étant donné le nombre de pièces structurales et de connections entre ces pièces. Tel que mentionné précédemment, ce genre de modèle ne peut se réaliser qu'avec l'aide de puissants outils de calcul. Il existe cependant des approches permettant de modéliser une structure complexe sans recourir à des modèles FEA dont la création d'un modèle complet peut nécessiter plusieurs semaines de travail.

## Modélisation par SEA

La méthode SEA (Statistical Energy Analysis) est basée sur les bilans d'énergie servant à déterminer l'énergie vibratoire ou acoustique d'un élément. Il est possible d'approximer la quantité d'énergie que contient un élément, un profilé par exemple, simplement en calculant la densité modale : le nombre de modes dans la plage étudiée. On peut constituer un modèle à partir d'éléments de plaque et de poutres et ces éléments sont liés entre eux par des fonctions de transfert d'énergie. Ces fonctions de transfert d'énergie sont construites à partir de résultats expérimentaux. Par exemple, la transmission d'une jonction boulonnée de deux profilés dépend du nombre de boulons, des dimensions relatives des profilés et de la densité modale de chacun d'eux.

Cette technique est particulièrement utilisée lors de calculs vibro-acoustiques pour des structure complexes. Dans ces cas, le nombre d'éléments à utiliser est trop élevé pour que les équations soient résolues de façon classique.

## Structure équivalente

L'utilisation d'une structure simple, tel que présenté par Pan *et al.* (1992), peut permettre d'approximer le comportement dynamique des modes rigides couplés à une structure flexible. Pour ce faire, les auteurs modélisent une masse et une plaque isolée par des ressorts positionnés aléatoirement. Le montage étudié est présenté à la Figure 2.3.

Aux 6 degrés de liberté de mouvement du corps rigide s'ajoutent les degrés de liberté de la plaque. Un système distribué comme une plaque possède une infinité de degrés de liberté.

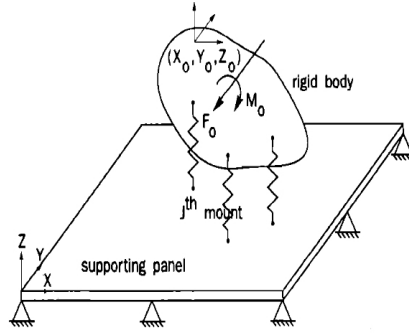


Figure 2.3 Modèle tiré de Pan *et al.* (1992)

La transformation en coordonnées modales permet d'exprimer ces degrés de liberté sous la forme des modes propres. Il n'est cependant nécessaire que de modéliser les modes dans la plage de fréquences d'intérêt de l'étude.

Dans l'exemple montré, les dimensions de la plaque choisie sont plutôt faibles et représentent mal le comportement d'un véritable châssis : les premières fréquences naturelles se situent dans la même plage que les modes rigides de la masse sur ses ressorts. Puisque les fréquences naturelles des deux entités se situent dans les mêmes fréquences, le couplage entre les modes de chacun est beaucoup plus notable que pour un système d'ancrage et un châssis.

#### 2.1.4 Paramètres considérés

Il est commun dans la littérature de négliger les accélérations normales  $a = r\omega^2$  causées par la vitesse de rotation du moteur. Une brève inspection permet de constater que dans la plage de fréquence dans laquelle on retrouve habituellement des modes de vibration (10 à 40 Hz) les vitesses angulaires ( $\omega$ ) sont au minimum 60 fois plus faibles que les accélérations angulaires. Cela apporte des accélérations centripètes négligeables. De plus, la rigidité du moteur étant de loin supérieure à celles des support ou du châssis, il ne peut y avoir d'accélération de Coriolis. L'accélération de Coriolis est causé par le déplacement d'un corps dans un repère mobile. Les mouvements relatif des pièces internes du moteur, provoquent de telles accélérations, mais les forces qui y sont associées seront considérées comme étant des forces générées par le moteur.

Bien que plusieurs auteurs négligent la contribution du couplage avec le châssis sur les fonctions de transfert du système dans le développement de méthodes de design, le châssis peut ne pas être négligé dans les cas où les fréquences naturelles du châssis sont proches des fréquences naturelles du moteur sur ses supports.

## 2.2 Modélisation du caoutchouc

Le caoutchouc est un matériau de faible rigidité (1 à 100 Mpa) qui est largement utilisé dans le domaine automobile et du véhicule récréatif comme élément de fixation de moteur. La faible rigidité mais la grande tenacité permettent aux supports d'isoler les vibrations émises par le moteur tout en résistant aux grandes forces et à l'environnement possiblement hostile du milieu d'application. Il est possible d'obtenir des supports de différentes rigidités en modifiant la forme de la pièce et en ajoutant des additifs au matériau.

Le caoutchouc possède un comportement hyperélastique et viscoélastique. Le modèle hyperélastique se base sur la distribution d'énergie de déformation emmagasinée dans le matériau. Il y a variation du comportement mécanique en fonction de la quantité d'énergie mécanique : le caoutchouc a donc un comportement non-linéaire. Dans le cas de la viscoélasticité, le comportement du matériau varie en fonction de la vitesse de déformation.

Deux approches sont généralement employées pour caractériser le comportement dynamique d'une pièce d'élastomère. Il est possible d'abord de caractériser le comportement du matériau, puis utiliser les résultats pour modéliser diverses pièces. Cette approche nécessite l'appui de logiciels de calculs par éléments finis. La seconde approche consiste à caractériser directement une pièce, ce qui permet de tenir compte directement du comportement du matériau et de l'effet de forme. La première approche est toutefois plus souple, particulièrement pour des fins d'optimisation où l'effet de forme varie au cours des itérations. Dans les deux cas, le modèle du caoutchouc ou de la pièce devra ultimement être intégré dans le modèle global du système moteur-support.

### 2.2.1 Modèle de Kelvin-Voigt

Le comportement du matériau peut être linéarisé en utilisant les modèles de Maxwell ou de Kelvin-Voigt. Ces modèles utilisent la combinaison d'un ressort et d'un amortisseur, dans les configurations telles qu'illustré à la Figure 2.4 pour appro-ximer la rigidité et l'amortissement d'un matériau.

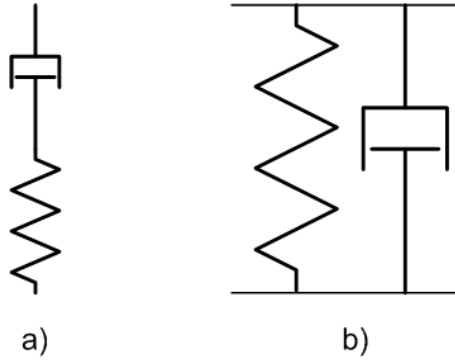


Figure 2.4 Modèles de Maxwell et de Kelvin-Voigt

Dans le domaine des fréquences, la rigidité dynamique s'exprime en fonction du coefficient de perte, soit le ratio du coefficient d'amortissement sur la rigidité.

$$K^* = K (1 + j\eta) \quad (2.12)$$

Les paramètres  $K$  et  $\eta$  peuvent être déterminés expérimentalement par une analyse en phase du cycle de déformation. En traçant l'historique de force et de déplacement, on peut facilement identifier la contribution de la rigidité et de l'amortissement à la force transmise. Tel qu'illustré à la figure 2.6, le facteur  $K$  est  $F_{max}/x_{max}$ , où  $x_{max}$  est le déplacement au point où la force est maximale. Le facteur de perte  $\eta$  est  $F_0/(x_0\omega K)$ .

Ce type de modélisation peut donner de bonnes approximations du comportement du matériau ou d'une pièce en élastomère. Cependant, le fait de négliger le comportement non-linéaire, comme dans les modèles de base de Kelvin-Voigt ou de Maxwell, peut conduire à des erreurs, particulièrement dans un système dynamique complexe et sensible aux variations de rigidité. Il existe cependant, des modèles similaires avec des composantes non-linéaires. L'évaluation de ces composantes est l'objet de la section 2.2.2.

### 2.2.2 Modélisation non-linéaire

Plusieurs approches sont utilisées dans la littérature pour rendre le caractère non-linéaire d'isolateurs en caoutchouc. Il est bien établi que le caoutchouc a un comportement dynamique qui varie en fonction de la fréquence et de l'amplitude. Pour la plupart des géométries et des mélanges de caoutchouc, la dépendance suit les mêmes tendances, tel qu'illustré à la figure 2.5.



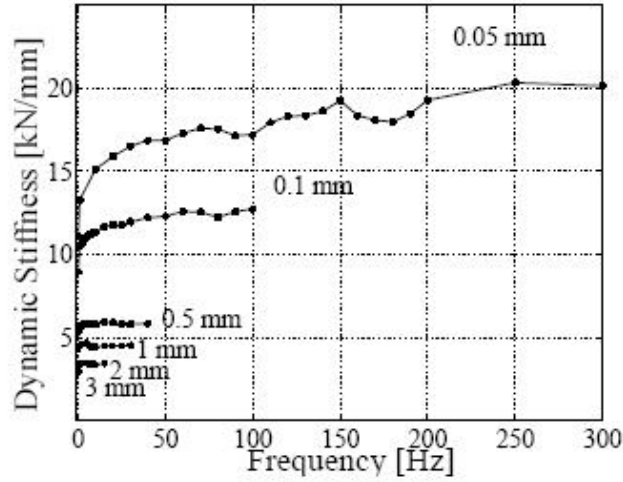


Figure 2.5 Raideur dynamique en fonction de la fréquence pour différentes amplitudes Sjöberg (2002)

Il est aussi démontré que les phénomènes associés au comportement non linéaire du caoutchouc peuvent être traités indépendamment les uns des autres. Il s'ensuit que la force générée par une déformation du matériau peut être exprimée comme étant une combinaison des contributions des phénomènes (Jeong et Singh (2001) et Sjöberg et Kari (2003)).

$$F_t(t) = F_E(t) + F_F(t) + F_A(t) \quad (2.13)$$

Où  $F_E(t)$  est la composante élastique,  $F_F$  la composante due à la fréquence et  $F_A$  la composante associée à l'amplitude.

### 2.2.3 Modélisation de la dépendance à la fréquence

Torvik et Bagley (1984) proposent d'utiliser les dérivées fractionnelles afin de modéliser le comportement du caoutchouc dans le temps et dans le domaine des fréquences. La dérivée fractionnelle permet d'associer à une fonction  $f$  une fonction  $i^\alpha f$  de sorte que la dérivée d'ordre  $\alpha$  de la fonction  $f$  s'exprime  $i^\alpha f$ . L'amortisseur du modèle de Kelvin-Voigt est remplacé par un ressort non linéaire rendant le caractère hyperélastique du caoutchouc. La contrainte dans le matériau est alors exprimée en fonction de la dérivée d'ordre  $\alpha$  de la vitesse de déformation qui satisfait :  $0 \leq \alpha \leq 1$

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) + C \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \varepsilon(t)$$

La contrainte dans le matériau est alors exprimée en fonction de  $\alpha$ , l'ordre de la fraction.

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) + bD^\alpha\varepsilon(t) \quad (2.15)$$

Le terme de non-linéarité  $bD^\alpha$  applique à la fonction à laquelle est multipliée la dérivée fractionnelle par rapport au temps. Cette dérivée peut être évaluée de façon discrète par l'intégrale de Riemann-Liouville.

$$D^\alpha\varepsilon(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{x(\tau)}{t-\tau} d\tau \quad (2.16)$$

Les auteurs démontrent par la suite que la dépendance à la fréquence de la rigidité peut être modélisée par

$$K^* = K + b(i\omega)^\alpha \quad (2.17)$$

où  $K^*$  représente la combinaison de la rigidité et de l'amortissement et  $\alpha$  correspond à l'ordre de la dérivée fractionnelle équivalente comme dans le domaine du temps.

#### 2.2.4 Modélisation de la dépendance à l'amplitude

La dépendance de la rigidité à l'amplitude de déformation des caoutchoucs industriels est associée à un phénomène de frottement interne des matériaux, appelé effet de Payne. La plupart des mélanges de caoutchouc utilisés comportent des additifs, notamment le carbone, augmentant la rigidité et le frottement interne. Comme il s'agit de frottement, la force associée est de sens contraire au déplacement, par conséquent la rigidité augmente (Ibrahim (2008)).

La force de frottement est établie en fonction de la force maximale et des paramètres initiaux au début du cycle : la force de frottement initiale ( $F_{fi}$  et le déplacement initial ( $x_i$ ).

$$F_f = F_{fi} + \frac{x - x_i}{x_2(1 - \text{sign}(\dot{x})\mu) + \text{sign}(\dot{x})(x - x_i)} (F_{max} - F_i) \quad (2.18)$$

Le coefficient de frottement est évalué expérimentalement  $\mu = \frac{F_f}{F_{max}}$  à partir de la relation force déplacement. (Figure 2.6)

Thaijaroen et Harrison (2010) ont proposé d'ajouter à ce modèle une composante d'ordre deux  $K_{e2}x^2$  pour permettre de modéliser le comportement de pièces en caoutchouc dont la rigidité varie avec l'amplitude. L'utilisation de ce paramètre apparaît importante lors de grands déplacements, typiquement supérieurs à 1 mm, ce qui est le cas des supports de moteur en utilisation normale.

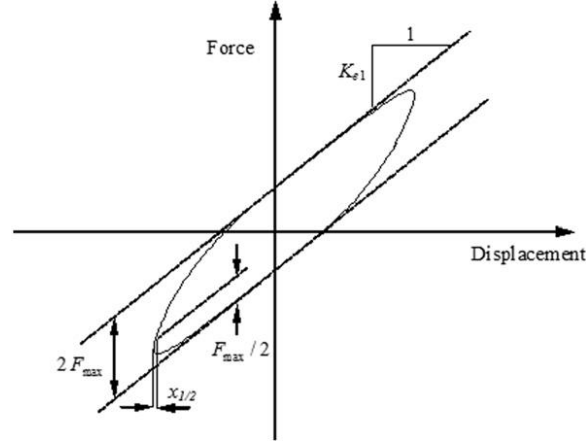


Figure 2.6 Relation force déplacement d'un support en élastomère tiré de Bagley et Torrik 2008

### 2.2.5 Les séries de Prony

Les séries de Prony sont un autre outil permettant de représenter le comportement d'un matériau. Ce type de représentation est généralement utilisé pour modéliser des matériaux au coefficient de perte élevé, mais la méthode s'applique aussi bien aux matériaux comme le caoutchouc Wu et Liechti (2000) dont le coefficient de perte est autour de 0.1. Le modèle est construit sous la forme de fonctions exponentielles décroissantes.

$$G_R(t) = G_0 - G_0 \sum_{n=1}^{N_p} g_n + \sum_{n=1}^{N_p} G_0 g_n e^{\frac{-t}{\tau_n}} \quad (2.19)$$

Dans cette équation  $\tau_n$  est appelé temps de retard les  $g_n$  sont les constantes de Prony. Avec cette représentation, il est aisément possible de passer du domaine temporel au domaine des fréquences. La caractérisation peut donc se faire à partir d'essais de fluage et de relaxation. Il n'est donc pas nécessaire d'avoir une machine de caractérisation dynamique sous la main : les essais sont réalisés en chargement quasi-statique. Les paramètres obtenus dans le domaine du temps se transposent directement dans le domaine des fréquences :

$$G^* = G_0 - G_0 \sum_{n=1}^{N_p} g_n + \sum_{n=1}^{N_p} \frac{G_0 g_n \tau_n j \omega}{1 + \tau_n j \omega} \quad (2.20)$$

Or, cette représentation peut facilement être intégrée dans un modèle dans le domaine des fréquences. L'application directe des séries de Prony ne peut cependant se faire que pour des pièces de forme simple, ce qui s'applique difficilement à la plupart des tampons d'ancrage.

### 2.2.6 Modèles de matériaux pour logiciel FEA

Les modèles présentés jusqu'ici servent à faire la caractérisation de pièces faites de polymères. Pour effectuer des études par éléments finis, il est cependant nécessaire de produire des modèles de comportement du matériau en évitant de mesurer l'effet de forme de la pièce mesurée. Généralement les courbes contrainte-déformation nécessaires à la caractérisation du caoutchouc sont faites à partir de tests sur une bandelette sous tension (Tabaddor (1987) et Reese et Govindjee (1997)).

L'expression mathématique des modèles nécessite l'utilisation des ratios de déformation dans les 3 directions  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ , ainsi que les paramètres I, tel que :

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2, I_2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2, I_3 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2, \quad (2.21)$$

#### Le modèle polynomial

Le modèle polynomial est utilisé pour modéliser la relation déformation-contrainte d'élasto-mères. Un minimum de 4 points (i et j) sont nécessaires pour l'obtention de résultats cohérents. L'énergie de déformation est

$$U = \sum_{i+j=1}^N C_{ij} (I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j + \sum_{i=1}^N \frac{1}{D_1} (J_e - 1)^{2i} \quad (2.22)$$

avec  $J_e$  étant le volume élastique,  $D_i$  et  $C_i$  sont des constantes du matériau.

#### Le modèle Moonley-Rivlin

Le modèle de Moonley-Rivlin est similaire au modèle polynomial, mais il requiert moins de points (i,j) pour être fonctionnel. Cependant, les paramètres de ce modèle doivent être obtenus expérimentalement.

$$U = C_{10}(I_1 - 3) - C_{01}(\lambda_1^{-2} + \lambda_2^{-2} + \lambda_3^{-2}) \quad (2.23)$$

#### Le modèle Neo-Hookean

Le modèle Neo-Hookean est le module de base utilisé par le logiciel Abaqus, utilisé dans le cadre du projet.

$$U = C_{10}(I_1 - 3) + \frac{1}{D_1}(J_{el} - 1) \quad (2.24)$$

### 2.2.7 Modélisation de la dépendance à l'angle de sollicitation

À la connaissance de l'auteur, aucune publication n'a fait l'objet de l'effet de l'angle de sollicitation sur le comportement non linéaire de pièces en caoutchouc. La formulation du comportement en angle des cas linéaires est jugée acceptable. Soit un tampon situé dans un repère  $(X_{ref}, Y_{ref}, Z_{ref})$  tel qu'illustré à la Figure 2.7. Elle est utilisée dans plusieurs publications de modélisation linéaire et non-linéaire (Kim et Singh (1995) et Park et Singh (2010)).

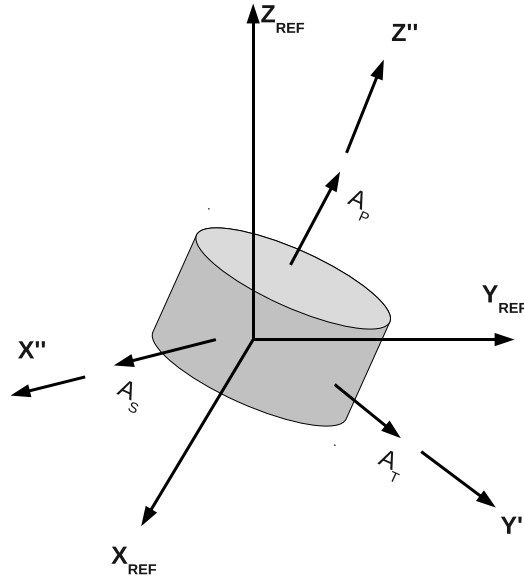


Figure 2.7 Système de coordonnées du tampon  $(X_{ref}, Y_{ref}, Z_{ref})$  dans le système de coordonnées de référence du véhicule

La rigidité du support dans son propre système d'axes est exprimée comme suit dans le système d'axe A de la figure 2.7 :

$$\mathbf{K}_A = \begin{pmatrix} K_t & 0 & 0 \\ 0 & K_s & 0 \\ 0 & 0 & K_p \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

Pour exprimer la rigidité dans le système d'axes global on utilise une matrice de rotation d'Euler (R), de sorte que l'on puisse exprimer la rigidité tel que dans l'équation suivante.

$$\mathbf{K}_{x,y,z} = \mathbf{R}^T \mathbf{K}_A \mathbf{R} \quad (2.26)$$

## 2.3 Méthodes expérimentales

Pour ce type de projet, il est nécessaire d'adopter une approche expérimentale d'abord pour déterminer les forces en jeu puis pour valider le modèle qui sera développé. Cette section présente des éléments essentiels à l'analyse du comportement dynamique du moteur en opération ainsi que des fonctions de transfert du véhicule sur ses supports.

### 2.3.1 La méthode des FRF

La méthode des FRF (Frequency Response Function) est utilisée pour déterminer les forces appliquées sur un système dynamique à partir de fonctions de transfert déterminées expérimentalement. Liu *et al.* (2005) et Cho et Kim (2002) ont obtenus des résultats très cohérents en utilisant cette méthode.

L'application de la force se fait généralement à l'aide d'un marteau d'impact instrumenté. L'impact permet de solliciter le système dans une vaste gamme de fréquences. La transformation dans le domaine des fréquences des signaux temporels d'impact peut comporter beaucoup de bruit. Des techniques de traitement de signal doivent donc être appliquées afin d'obtenir des fonctions de transfert utilisables. De plus, un certain doigté est nécessaire afin d'obtenir une bonne répétabilité des forces appliquées.

L'application de la force peut aussi se faire par un piston hydraulique contrôlé par un servo-moteur. La sollicitation peut alors être faite en onde carrée, en balayage ou par un bruit blanc ou rose dans la bande de fréquences choisie. Il est à noter que l'application d'une force en bruit blanc ou rose peut nécessiter une machine de plus grande puissance qu'une excitation par ondes carrées.

Les signaux d'accélération causés par l'impulsion du marteau doivent être acquis en simultané. Afin de pouvoir reconstruire les mouvements rigides du moteur, un minimum de 9 mesures dans trois différents axes doivent être effectuées. Si l'équipement le permet, il est possible de positionner des accéléromètres supplémentaires : plus le nombre de signaux est important, plus les résultats sont précis.

À partir des fonctions de transfert connues et de spectres d'accélération causés par des

forces inconnues, il est possible de déterminer le spectre de force inconnu. Dans le cas étudié, les spectres d'accélération sont ceux obtenus lors du fonctionnement du moteur et les forces à déterminer sont les forces internes du moteur. L'équation suivante montre les opérations mathématiques nécessaires pour reconstruire les forces. La matrice des fonctions de transfert n'est pas carrée, le résultat est donc obtenu par la méthode des moindres carrés.

$$\ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}\mathbf{H}_t \implies \mathbf{F} = \mathbf{H}^{-1}\ddot{\mathbf{X}} \quad (2.27)$$

Cette méthode nécessite, en plus d'un bon système d'acquisition à plusieurs canaux, un dispositif d'excitation de précision. Pour la viabilité de la méthode, la force appliquée doit être telle que le niveau de déplacement soit du même ordre de grandeur que lors du fonctionnement du moteur. Autrement, les fonctions de transfert établies ne sont pas tout à fait les mêmes que celles en vigueur lors du fonctionnement du moteur, à cause du caractère non-linéaire des supports.

### 2.3.2 Méthode des capteurs de force

Une méthode de reconstruction des forces du moteur ( $F_{in}$ ) a été développée par Martine Lavoie et publiée dans son mémoire de maîtrise en 2009. La méthode consiste à mesurer les forces transmises au châssis ( $F_t$ ), lorsque les supports en élastomères sont remplacés par des capteurs de forces. L'inertie du moteur est représentée par 4 masses ponctuelles, tel que représenté à la figure 2.8.

Les masses sont déterminées de façon à représenter la distribution du poids du moteur sur les quatre points d'appui. Les mesures sont prises par paires de supports en mesurant l'accélération et la force transmise dans les trois axes à chacun des points d'appui. Les mesures sont synchronisées numériquement pour constituer un ensemble complet d'essai. Pour déterminer la force induite, les forces transmises sont corrigées par les pseudo-forces inertielles.

$$\mathbf{F}_{i,in} = \mathbf{F}_{i,t} + \mathbf{M}_i\mathbf{a}_i \quad (2.28)$$

La méthode a été conçue de cette manière puisque la matrice inertielle du moteur était inconnue à cette étape du projet. La méthode correction des pseudo-forces telle que formulée ne permet pas de bien tenir compte des rotations du moteur. Cependant, si la matrice de masse était déterminée, la technique de mesure pourrait offrir de très bons résultats. Certaines techniques permettant d'identifier les propriétés inertielles du moteur sont décrites à la section

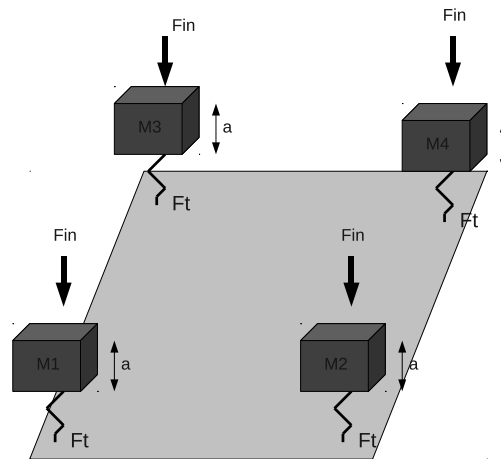


Figure 2.8 Représentation schématique de la méthode des capteurs de force

suivante.

### 2.3.3 Identification de l'inertie du moteur

Les méthodes d'identification dans le domaine des fréquences se divisent en trois approches ( Almeida *et al.* (2007) et Schedlinski et Link (2001)) :

- **Fonction de coût d'inertie** : cette méthode s'applique lorsque les modes rigides sont dans une plage de fréquence éloignée des modes structuraux. À partir des FRF et des rigidités, la matrice de masse est construite par itérations numériques afin d'obtenir des fonctions de transfert similaires à celles obtenues expérimentalement.
- **Identification directe des paramètres** : cette méthode s'applique dans les mêmes conditions que la précédente, cependant elle nécessite l'application d'un ensemble orthogonal de forces. Elle a cependant l'avantage de permettre l'identification de la rigidité, de la masse et de l'amortissement. Dans ce cas une optimisation de tous les paramètres est réalisée de façon à obtenir une fonction près des résultats expérimentaux.
- **Méthodes modales** : Cette méthode permet de déterminer les composantes de la ma-



trice d'inertie à partir d'un seul essai. La difficulté principale est d'obtenir la réponse des 6 modes rigides lors du même essai. Il est aussi nécessaire de connaître au moins une valeur de la matrice d'inertie. Le couplage des modes rigides n'a pas d'influence sur la méthode.

Étant donné que dans cette partie du projet, il n'est pas nécessaire de déterminer d'autres propriétés que l'inertie en rotation et que le couplage pourrait avoir un effet sur les résultats : la méthode modale semble la plus indiquée. Soit la matrice des modes propres normalisés  $\phi$ , le delta de kronecker implique que

$$\phi \mathbf{M} \phi = \mathbf{I} \quad (2.29)$$

et la matrice 6x6 de l'inertie est identifiée. Pour normaliser les vecteurs propres, il faut connaître au moins un paramètre de  $\mathbf{M}$ , ce qui est le cas du problème étudié dans le mémoire.

## 2.4 Méthodes d'optimisation

Il existe une vaste gamme de méthodes numériques permettant de réaliser des optimisations sur des problèmes complexes à plusieurs variables. Ces outils mathématiques doivent être utilisés avec soin. Le choix du critère d'optimisation et la modélisation adéquate du système dynamique sont essentiels à la validité de la méthode.

### 2.4.1 La méthode de focalisation

La méthode de focalisation est une méthode très pratique couramment utilisée dans l'industrie. Des exemples de cette méthode se retrouvent dans la littérature depuis 1950. La méthode consiste à assurer que la somme des moments autour d'un axe de rotation soit nulle lorsqu'un déplacement vertical du centre de masse du moteur est appliqué. Cette méthode permet donc de découpler partiellement un axe de rotation de la translation verticale. La rotation n'est découplée que partiellement parce que les forces viscoélastiques ne sont pas considérées par cette approche. (Park et Singh (2008))

Mathématiquement, la méthode de focalisation peut s'exprimer de la façon suivante.

$$\frac{a_z}{a_y} = \frac{(L - 1) \tan \phi}{L \tan^2 \phi + 1} \quad (2.30)$$

Avec  $L$  étant le ratio de la rigidité axiale sur la rigidité radiale,  $a_z$  la hauteur du centre de masse,  $a_y$  la distance entre les supports et  $\phi$  l'angle entre l'axe de tension-compression et la verticale. Si une force verticale est appliquée, la somme des moments causés par les forces

de réaction en tension-compression et en cisaillement est nulle. Inversement, si un couple est appliqué, la somme des forces verticales et latérales est aussi nulle. L'axe d'application du couple moteur, dans lequel des pulses et des chocs sont appliqués, est donc découplé des deux translations. Il est seulement possible d'appliquer cette méthode pour un problème symétrique à moins qu'il soit possible d'utiliser des supports de moteurs de différentes rigidités sur le même véhicule. La figure 2.9 montre la représentation graphique de la méthode. L'axe élastique est l'axe selon lequel la force des réactions en tension-compression et en cisaillement génère un moment de même amplitude mais de signe inverse. Si le centre de masse est à l'intersection de ces axes, un déplacement quelconque ne génère pas de moment.

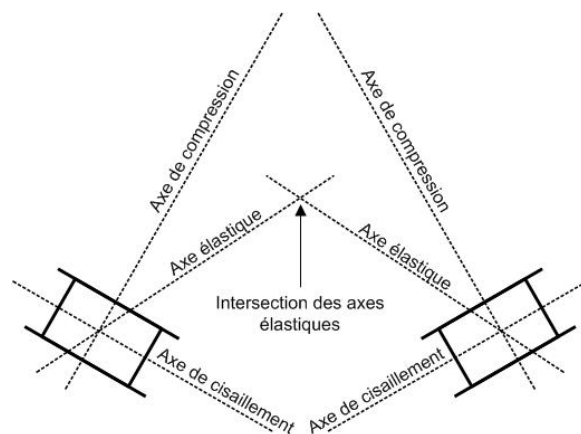


Figure 2.9 Disposition des axes dans la méthode de focalisation tiré de Martine Lavoie 2009

### 2.4.2 Force et énergie transmise

Kaul et Dhingra (2005) ont proposé une méthode d'optimisation basée sur les forces transmises du véhicule au châssis en considérant la rigidité, la position et l'orientation des supports. Leur méthode utilise une fonction de coût et un algorithme génétique pour limiter les forces transmises au châssis tout en évitant que des fréquences naturelles se situent dans des bandes de fréquences correspondant aux fréquences des forces générées par le moteur. Leur technique est avantageusement comparée à une technique similaire dans laquelle l'amplitude du mouvement du moteur est minimisée.

Les travaux réalisés sont semblables à ce qui a été accompli par Ashrafiun (1993) qui ont réalisé une optimisation semblable pour des nacelles supportant un moteur d'avion. Dans les deux cas, le châssis du véhicule et de l'aéronef sont considérés rigides. Bien qu'il a été démontré que l'effet du châssis peut être négligé dans la modélisation de la dynamique du

système, une force de faible amplitude n'est pas garante d'une isolation adéquate et d'un comportement stable si la force correspond à une fréquence naturelle de la structure.

Li et Lavrich (1999) ont réalisé une étude de la transmission de puissance par des isolateurs linéaires sur une structure. La structure étudiée est le cas simplifié d'un moteur monté sur une plaque par l'entremise de 4 supports. L'énergie transmise à la plaque est étudiée en fonction de la fréquence de la force appliquée par le moteur. Il est démontré que le couplage entre la position des points de fixation, la forme des modes et la fréquence ont un effet significatif sur la vibration de la plaque. L'énergie transmise à l'élément de support est montrée par l'équation suivante.

$$P_j = \frac{1}{2} \text{Real} (i\omega R_j \text{conj}(u_j)) \quad (2.31)$$

### 2.4.3 Découplage de l'axe de torsion

Le fonctionnement du moteur à piston génère des forces d'impulsion de couple dans l'axe de la transmission de puissance par le contact des dents d'engrenage. Les impulsions ayant la capacité d'exciter tous les modes à leur fréquence naturelle, il est donc approprié de vouloir isoler les impulsions des autres degrés de liberté. (Park et Singh (2008))

Il est possible de découpler l'axe de torsion des autres degrés de liberté de façon analytique en posant un vecteur propre  $q_t = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]$ . Il s'en suit que  $Kq_t = \lambda Mq_{tra}$  ou  $\lambda$  est la valeur propre associée au mode dans l'axe  $q_{tra}$ . Il suffit ensuite de résoudre l'équation pour les paramètres étudiés, qui sont généralement la position et l'angle des supports. Puisque les vecteurs propres constituent un ensemble orthogonal, tous les autres modes rigides ne comporteront pas de mouvement de rotation autour de l'axe  $x$  et le problème d'impulsion est limité à un seul axe.

Park et Singh (2008) ont étudié le cas d'un système de support de moteur comportant de supports en élastomère et des supports hydrauliques, leur objectif étant de réaliser une optimisation permettant de découpler l'axe d'application de la torsion du moteur des autres modes. La technique est comparée à la méthode classique de focalisation. Une atténuation de 75dB est observée dans tous les axes, excluant l'axe d'application du couple, lorsque le système dynamique est soumis à une impulsion dans l'axe du couple.

Le découplage de l'axe de torsion peut certes permettre d'éviter certaines sollicitations néfastes, mais ne peut garantir une isolation des forces dans les autres axes. Dans la littérature on ne retrouve pas de cas pratique d'analyse de cette méthode. Il semble que la méthode soit difficilement applicable en pratique puisque la précision des rigidités nécessaire à l'application de cette méthode est très difficilement atteignable. Ce critère peut par contre être jumelé à d'autres pour réaliser une optimisation combinée. Si le spectre de force est connu, une optimisation des forces transmises ou de l'énergie transmise au châssis tiendra compte des pulses générés par la transmission de puissance du moteur.

## CHAPITRE 3

### Démarche du projet

Le projet de recherche en partenariat avec l'industrie a d'abord comme objectif de répondre aux besoins de Soucy Baron inc. Le principal objectif sera de développer une méthode de design rapide utilisant un modèle analytique de système de support de moteur. Ainsi, cette méthode pourra combler un besoin du partenaire industriel et permettre de faciliter le design des supports pour leurs clients : le processus étant itératif à priori. Par le fait même, certains points clés de la démarche devront être développés car la revue de littérature n'a pu permettre de trouver des méthodes existantes adéquates.

La plupart des auteurs se basent sur des calculs théoriques sans toutefois comparer ou valider leurs résultats expérimentalement. On ne retrouve pas non plus de validation expérimentale des procédures d'optimisation. Il est possible que certaines méthodes analytiques, particulièrement les méthodes modales, s'appliquent difficilement à la réalité si l'on ne considère ni le couplage avec le châssis ni le comportement non linéaire du caoutchouc.

Les méthodes de caractérisation et de modélisation du caoutchouc sont quant à elles bien avancées. Il est possible de bien représenter le comportement d'une pièce d'élastomère à partir de courbes force-déplacement obtenues expérimentalement. Les modèles présentés dans la littérature sont représentés dans le domaine du temps, alors que les équations du mouvement d'un système de tampon d'ancrage sont résolues avec beaucoup plus de facilité dans le domaine des fréquences.

À la connaissance de l'auteur, aucune optimisation de supports de moteurs non-linéaire a déjà été réalisée : que ce soit par les méthodes d'optimisation analytique ou par les méthodes itératives. De plus, il est rare de voir des comparaisons entre les fonctions de coûts utilisées dans les méthodes dites itératives.

Les objectifs de la présente recherche sont donc :

- Mettre au point une méthode de caractérisation de pièces en caoutchouc permettant de prédire le comportement de la pièce sous différentes conditions de sollicitation (angle, fréquence, amplitude)
- Développer un modèle analytique du moteur sur ses supports permettant de modéliser

le comportement *in situ* du moteur et de prédire la fonction de réponse en fréquence du système.

- Étudier les effets du comportement non-linéaire sur la réponse sous excitation harmonique et sur les fonctions de transfert du véhicule.
- Proposer une méthode d'optimisation permettant de limiter les vibrations ressenties sur le véhicule.

L'approche utilisée pour répondre à ces objectifs est la suivante :

- Caractériser expérimentalement le comportement dynamique du support de moteur selon les paramètres étudiés (fréquence, amplitude, angle). Cette caractérisation permettra de déterminer des fonctions mathématiques permettant de modéliser le comportement dynamique des supports actuels dans le domaine des fréquences.
- Mesurer expérimentalement les fonctions de transfert du véhicule et la réponse lorsque le moteur est en marche.
- Programmer un modèle analytique en utilisant les formes de fonctions données par la caractérisation des supports actuels.
- Étudier les effets du comportement non-linéaire sur les fonctions de transfert et la réponse *in situ*.
- Développer une méthode d'optimisation dans l'environnement Matlab.
- Répertorier et tester différentes fonctions de coût pour l'optimisation.
- Transférer les connaissances acquises au partenaire industriel.

La description détaillée des tâches est présentée en annexe.

### **Autres activités liés au projet**

Le projet d'ensemble comporte aussi une gamme de modélisations par éléments finis Lavoie (2009) ayant pour objectif de mieux comprendre les déformations du support et son comportement dynamique. Il n'en sera pas question dans ce document. Cependant, la section recommandations traitera de quelques voies qu'il serait intéressant d'explorer en utilisant la modélisation FEA.

Il a aussi été tenté de récolter l'énergie transmise par les supports en utilisant des éléments piézoélectriques : cette avenue a été abandonnée puisque l'énergie possiblement récoltée n'est pas assez élevée pour en justifier l'investissement. Les activités liés à cet axe de recherche

ont été entièrement réalisées par JCL et ont fait l'objet de publications, mais ne sont pas traitées dans le document.

## CHAPITRE 4

### Travaux expérimentaux

Ce chapitre présente les différentes études expérimentales qui ont été réalisées lors du projet. La reconstruction des forces du moteur permettra de simuler le comportement *in situ* dans le chapitre 6 : modélisation et optimisation. L'analyse modale du véhicule sera quant à elle utilisée pour valider le modèle construit. Dans cette section, toutes les analyses feront référence au système d'axes présenté à la figure 4.1.

#### 4.1 Analyse dynamique du véhicule

Trois types d'analyses ont été faites sur le véhicule. (1) Les spectres des forces exercées par le moteur sur les supports ont été déterminés à partir de mesures de force et d'accélération. (2) Les fonctions de transfert des principaux modes rigides du moteur sur ses supports ont quant à eux été déterminés par des essais d'impact. (3) Finalement, la mesure des spectres d'accélération a été réalisée lors du fonctionnement du véhicule. L'obtention des forces exercées sur le moteur permettra de déterminer les forces auxquelles les supports sont soumis et permettra de réaliser des optimisations *in situ* : à partir des conditions de fonctionnement réelles du véhicule. Les fonctions de transfert et les mesures d'accélération permettront de valider le modèle qui sera ensuite utilisé pour faire les optimisations.

Ces trois ensembles de mesures ont été prises sur le même banc d'essai. Le véhicule étudié a été dépouillé de toutes pièces non-structurales et fixé solidement dans le plancher bétonné du laboratoire. Le banc d'essai est composé du châssis, du groupe moto-propulseur et des composantes essentielles au fonctionnement du moteur. Une photographie du véhicule dépouillé est présentée à la figure 4.1.

##### 4.1.1 Reconstruction des forces

Une première tentative de la méthode de reconstruction des forces expérimentales a été effectuée par Lavoie (2009). Un résumé de ses travaux est présenté dans la revue de littérature. La méthode développée a un grand potentiel puisqu'elle permet d'éviter les problèmes liés aux non-linéarités du système : les supports de caoutchouc sont retirés. Ceci constitue un net avantage sur la méthode des FRF, méthode aussi présentée dans la revue de littérature. Dans la version développée par M.Lavoie les quatre supports sont traités indépendamment et



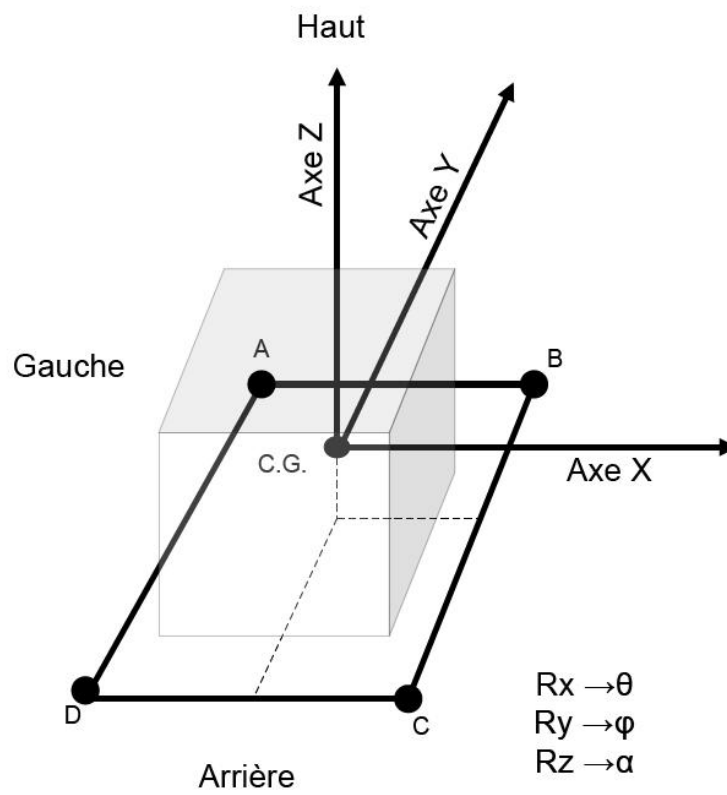


Figure 4.1 Identification des supports et système d'axes utilisé dans le chapitre 4

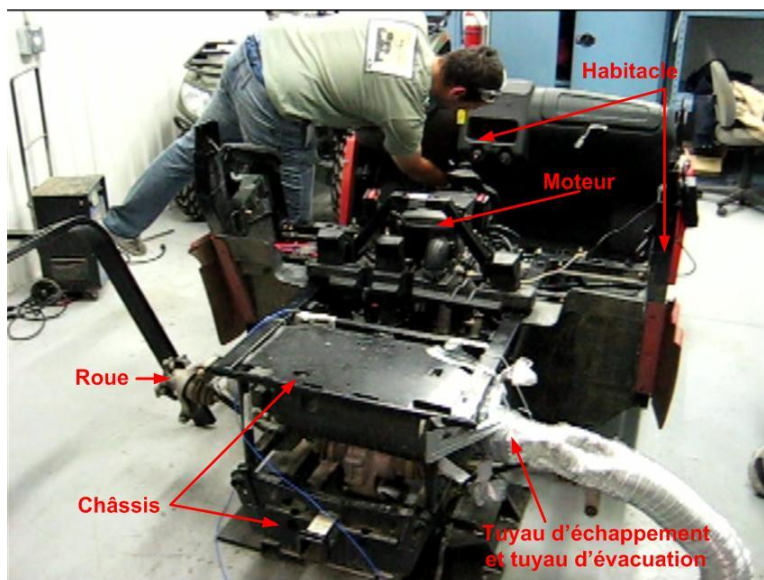


Figure 4.2 Montage expérimental utilisé tiré de M.Lavoie mémoire de maîtrise

la masse du moteur est modélisée par quatre masses réparties au *pro rata* de la distribution du poids du moteur. La représentation de l'inertie du moteur ne pose pas de problème quant à la correction des pseudo-forces inertielles de translation. Cependant, l'inertie en rotation ne peut être bien modélisée par les quatre masses réparties.

La première amélioration de la méthode est de remplacer les quatre masses par un seul corps rigide. Pour ce faire, des traitements de signaux supplémentaires sont nécessaires pour obtenir les accélérations du corps rigide en son centre de masse.

### Détermination de l'inertie du moteur

La masse et le dessin de définition du moteur qui permet de positionner le centre de masse du moteur ont été fournis par Artic Cat. Cependant, la matrice d'inertie n'a pu être divulguée par le fabricant. Il existe des méthodes d'identification de paramètres modaux : les principales sont présentées dans la revue de littérature. Les résultats présentés dans la littérature, les cas pratiques ayant des résultats acceptables, le corps rigide dont les propriétés sont identifiées repose sur des ressorts linéaires, ce qui n'est pas le cas de l'application. De plus, la résolution en fréquence des spectres qui permettraient d'appliquer ces méthodes n'est pas suffisante : les mesures ont été prises pour d'autres fins. L'objectif premier lors de la prise des mesures était de pouvoir reconstruire les forces du moteur par la méthode des FRF.

Un modèle en trois dimensions respectant les dimensions hors tout du moteur a été construit en utilisant le logiciel de modélisation 3D CATIA. Des masses ont été ajoutées de sorte que la position du centre de masse et la masse correspondent aux valeurs connues. L'hypothèse que la distribution du poids à l'intérieur du véhicule est uniforme est utilisée. Finalement, le logiciel calcule les moments d'inertie du moteur en intégrant  $\rho r^2 dV$ . Le modèle CAD est illustré à la figure 4.3.

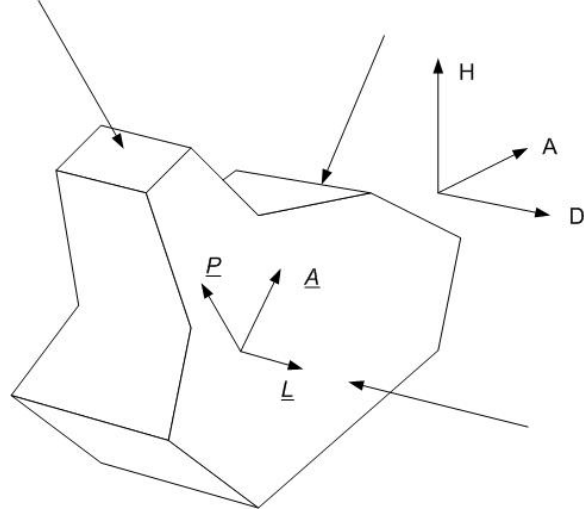


Figure 4.3 Modèle CAD balancé du moteur

La matrice d'inertie obtenue est

$$M = \begin{bmatrix} 62 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 62 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 62 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4.2 & 0.032 & -.26 \\ 0 & 0 & 0 & .032 & 1.9 & 0.081 \\ 0 & 0 & 0 & -.26 & 0.081 & 3.9 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

### Instrumentation du véhicule

La technique de mesure des forces requiert l'utilisation de deux accéléromètres et de deux capteurs de force triaxiaux. Les capteurs sont positionnés par paires à la place des supports du moteur qui sont retirés du montage. La disposition des paires de capteurs est montrée à la figure 4.4 : la flèche rouge pointe vers l'un des capteurs de force triaxiaux ; la flèche jaune

pointe l'un des accéléromètres triaxiaux.

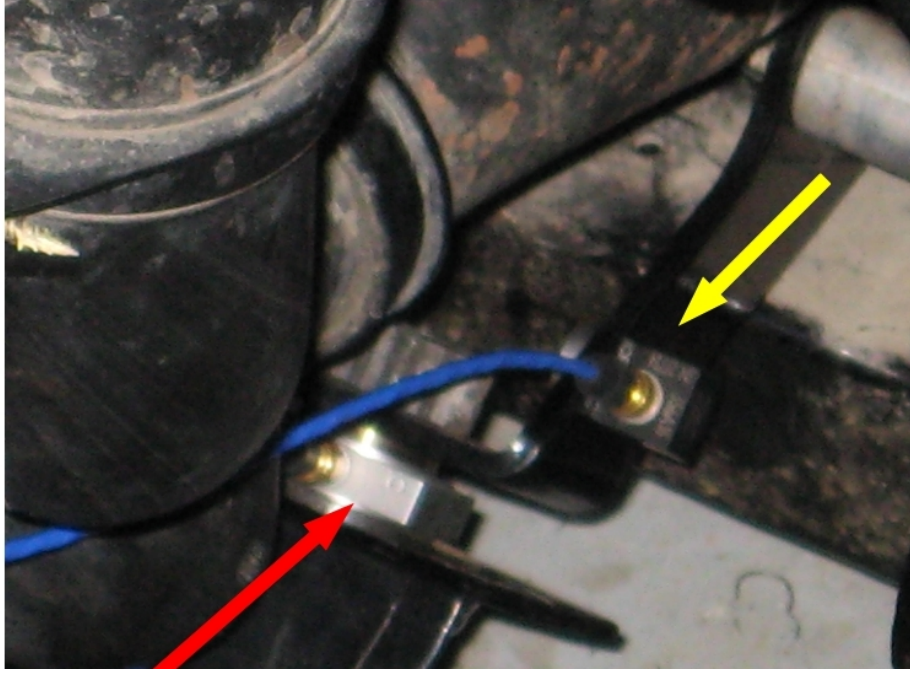


Figure 4.4 Disposition des capteurs de force

Les mesures de forces et d'accélération sont faites par paires (avant, côté droit, arrière et côté gauche). Ces mesures sont ensuite synchronisées en phase à partir des mesures communes entre les côtés. Des détails supplémentaires des techniques de traitement de signal sont décrits dans le rapport d'Amaury Fillon (2009).

### Traitement des signaux

Les capteurs de force et les accéléromètres sont orientés dans les directions principales du système de coordonnées local (figure 2.7) des supports de moteur. Une transformation de repère est premièrement appliquée aux spectres pour obtenir des signaux dans le repère (x,y,z) du véhicule. La transformation s'effectue par l'application d'une matrice de rotation.

$$A_{global} = \mathbf{R}A_{local} \quad (4.2)$$

Un ensemble de mesures pour seulement trois des quatre positions des supports est nécessaire à l'obtention des forces et des accélérations dans les coordonnées globales du

véhicule. Le calcul des accélérations (3 translations et 3 rotations) se fait en résolvant le système d'équations géométriques du moteur. Soit les signaux mesurés à un point d'ancrage :

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \\ \ddot{Z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Pour l'ensemble des mesures aux trois points on utilise alors la représentation matricielle du produit vectoriel : le tenseur vectoriel T.

La résolution du système d'équation implique que :

$$\begin{bmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \\ \vec{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{3x3} & T_a \\ I_{3x3} & T_b \\ I_{3x3} & T_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{X} \\ \ddot{Y} \\ \ddot{Z} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

où I est la matrice identité. La matrice est inversée en utilisant l'outil d'inversion de matrices non-carrées de MATLAB. Ainsi, les accélérations, les forces et les moments sont obtenues dans les coordonnées globales du véhicule.

Pour obtenir les forces et les moments induits par le fonctionnement du moteur ( $F_i$ ), il suffit d'ajouter la pseudo-force inertielle ( $Ma_{mes}$ ) aux forces mesurées.

$$F_i = F_{mes} + \mathbf{M}a_{mes} \quad (4.5)$$

## Résultats

La méthode de reconstruction des forces adaptée de la méthode proposée par M.Lavoie donnent de très bons résultats. Il faut cependant poser l'hypothèse que les forces générées par le moteur ne dépendent pas de l'accélération de celui-ci. L'hypothèse est acceptable puisque les forces normalement générées sont causées par la combustion du carburant et l'accélération des pièces internes du groupe moto-propulseur. L'erreur associée à ces forces potentiellement différentes selon le mode de fixation du moteur est bien moindre que l'erreur pouvant être générée par la non-linéarité des supports lors de l'application de la méthode classique des FRF.

Les résultats obtenus à la figure 4.5 correspondent bien aux spectres de force habituels

pour des moteurs de ce type : c'est-à-dire un moteur à 2 pistons et à 4 temps (Liu *et al.* (2005)).

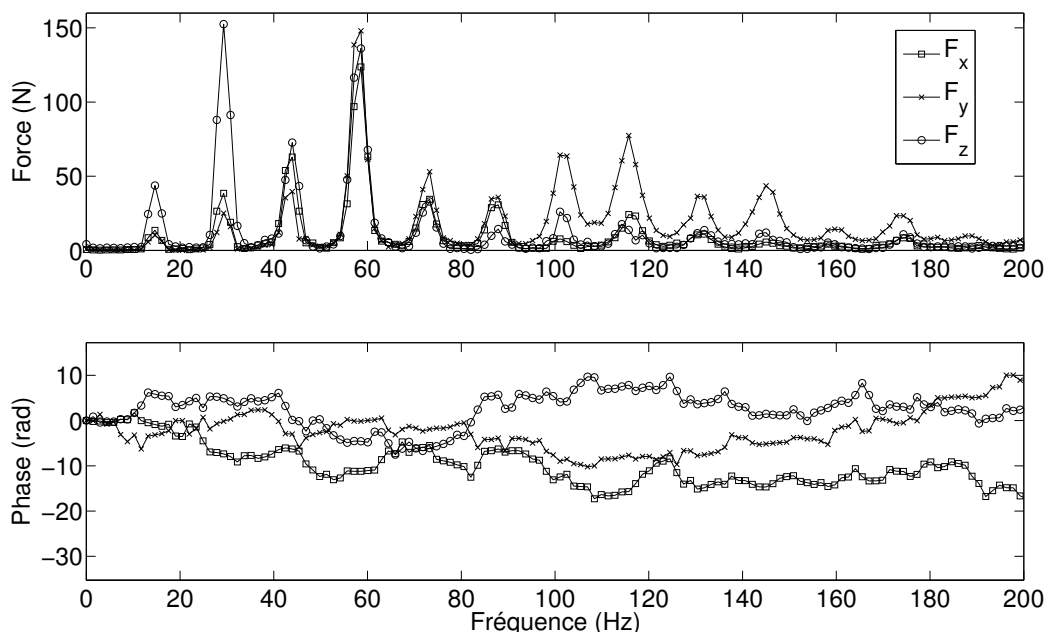


Figure 4.5 Forces reconstruites par les mesures de capteurs de force à 900 RPM

Les moments engendrés par le fonctionnement du moteur sont aussi calculés par la même méthode. L'ordre de grandeur et la phase des moments correspondent aussi à ce qui est attendu : selon le dessin de définition du moteur le bras de levier maximal (distance des pistons du centre de masse) est évalué à 7-10 cm.

Les forces et les moments reconstruits expérimentalement pour des conditions d'utilisation types : 900 RPM (neutre) et 1800 RPM (vitesse de croisière), seront ensuite repris pour modéliser le comportement du moteur sur ses supports. Le spectre des forces à toutes les vitesses de rotation du moteur peut être reconstruit sachant que l'amplitude des forces générées est directement proportionnelle à la vitesse du régime moteur. Le déphasage entre les forces demeure le même puisque la différence de phase entre les différentes composantes du spectre de force est causé par la séquence des étapes de combustion du carburant. La séquence demeure la même peu importe la vitesse.

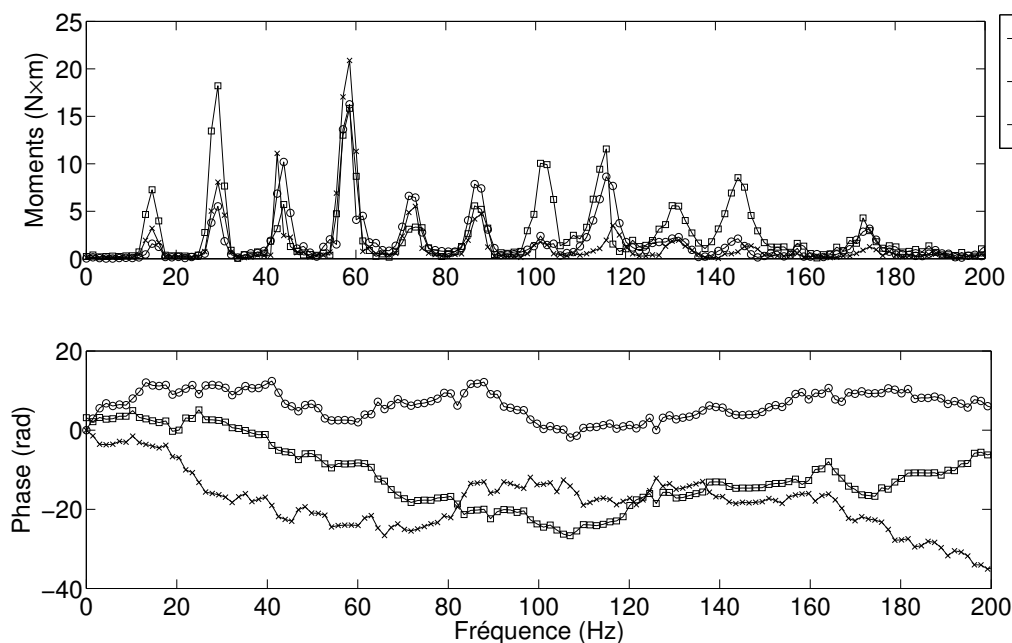


Figure 4.6 Moments reconstruits par les mesures de capteurs de force à 900 RPM

#### 4.1.2 Fonctions de transfert

Les fonctions de transfert des mouvements rigides du moteur et du châssis sont obtenues par la méthode classique du test d'impact. Des impacts répétés sont appliqués dans 3 directions principales près du centre de masse du moteur. Les signaux d'accélération (4 positions x 3 axes) sont mesurés à la position des supports du moteur. La méthode a pour objectif d'identifier les modes et les fréquences propres.

La structure étudiée est un assemblage complexe ce qui génère des forces de frottement. Le comportement dynamique est donc non-linéaire. À ce comportement on ajoute les non linéarités associées aux isolateurs en caoutchouc. Afin d'obtenir des spectres d'une qualité acceptable, des techniques de moyennage sont appliquées. Les paramètres du traitement de signal sont détaillés au tableau 4.1.

L'estimateur de type H1 est très utilisé pour traiter les signaux dans le but de déterminer les fonctions de transfert de systèmes complexes. Le spectre de force contient généralement beaucoup de bruit, le conjugué du spectre et le moyennage est utilisé pour en diminuer le bruit : on filtre les signaux faiblement corrélés.

Fréquence d'acquisition	2400Hz
Temps d'acquisition	5 secondes
Nombre d'acquisitions	50
Fenêtre temporelle	Rectangulaire
Fréquences analysées	0-400 Hz
Estimateur	H1

Tableau 4.1 Paramètres d'acquisition et de traitement de signal

$$H_1(\omega) = \frac{S_{af}(\omega)}{S_{ff}(\omega)} = \frac{A(\omega)F^*(\omega)}{F^*(\omega)F^*(\omega)} \quad (4.6)$$

Les fonctions de transferts pour des impacts latéraux et dans l'axe des pistons sont présentés.

### Fonctions de transfert sur l'axe principal

Les fonctions de transfert présentées sont celles obtenues suite à un impact dans l'axe des pistons. L'axe des pistons comporte principalement des composantes en y (avant-arrière) et un peu en z (haut-bas). L'application d'une force selon cet axe génère aussi un moment autour de l'axe des x.

La figure 4.7 présente les fonctions de transfert de translation obtenues lors de l'application d'une force selon l'axe des pistons.

Des fréquences naturelles peuvent être identifiées à 12 et 18-20 Hz. La réponse en x et en y semblent montrer la présence de 2 fréquences naturelles dans cette plage. Il est cependant difficile de différencier les deux modes étant donné la faible résolution des spectres. Des fréquences à 22 Hz, 26Hz, 30Hz et 38 Hz sont quant à elles identifiables par l'analyse des rotations. (figure 4.8)

### Fonctions de transfert axe latéral

Lorsqu'un impact latéral est appliqué, on s'attend à ce que le mouvement le plus principalement sollicité soit le déplacement de côté (x). Les impacts sont appliqués sur l'une des rares surfaces planes présentes sur le côté du moteur. La surface choisie n'est pas directement alignée avec le centre de masse : un moment autour de l'axe y est également appliqué.



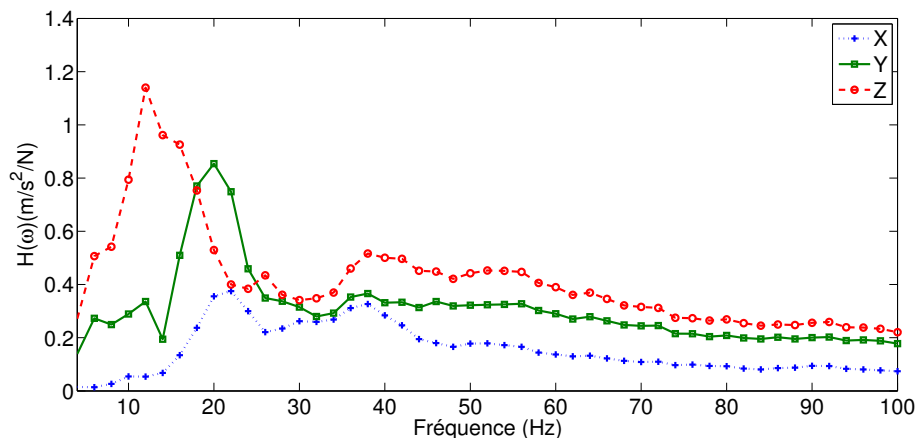


Figure 4.7 Fonctions de transfert en translation pour un impact dans l'axe principal

À l'analyse de ces spectres, il est possible d'identifier des modes à des fréquences de 26, 30 et 38Hz, ce qui confirme la présence des pics identifiés par les spectres des figures précédentes. La contribution des différents mouvements rigides à ces modes est présentée au tableau 4.3, la note *ind* signifie qu'il n'est pas possible d'identifier une composante. Les autres modes à plus basse fréquence observés sur les spectres précédents ne sont pas identifiables sur les spectres résultants d'un impact latéral.

F (Hz)	$x$ $m/s^2/N$	$y$ $m/s^2/N$	$z$ $m/s^2/N$	$R_x$ $rad/s^2/N$	$R_y$ $rad/s^2/N$	$R_z$ $rad/s^2/N$
12	<i>ind</i>	<i>ind</i>	<i>ind</i>	<i>ind</i>	<i>ind</i>	<i>ind</i>
18	<i>ind</i>	<i>ind</i>	<i>ind</i>	<i>ind</i>	<i>ind</i>	<i>ind</i>
22	<i>ind</i>	<i>ind</i>	<i>ind</i>	<i>ind</i>	<i>ind</i>	<i>ind</i>
25	0.05	0.05	0.07	0.4	0.4	0.38
30	0.09	0.12	0.08	0.4	0.4	0.35
38	0.05	0.08	0.14	0.6	0.2	0.2

Tableau 4.2 Fréquences naturelles et déformées identifiables à partir spectres résultant d'un impact latéral

Ces résultats sont comparés aux résultats obtenus à partir des spectres résultants d'un impact dans l'axe des pistons.

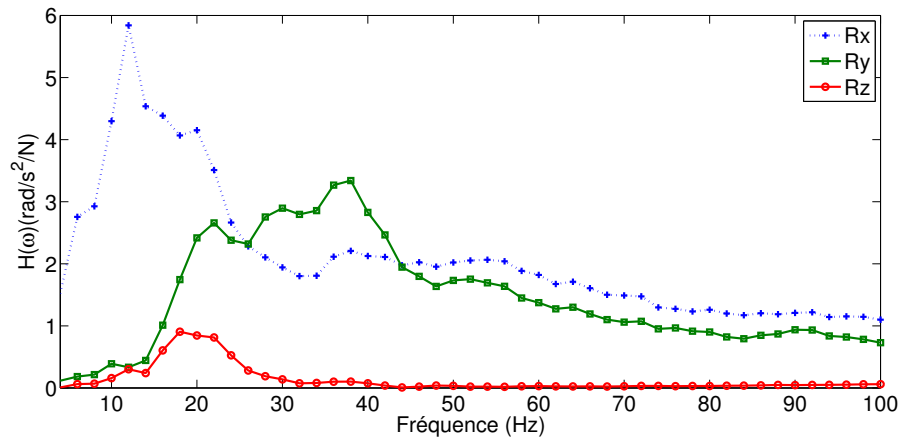


Figure 4.8 Fonctions de transfert en rotation pour un impact dans l'axe principal

F (Hz)	$x$ $m/s^2/N$	$y$ $m/s^2/N$	$z$ $m/s^2/N$	$R_x$ $rad/s^2/N$	$R_y$ $rad/s^2/N$	$R_z$ $rad/s^2/N$
12	0.05	0.3	1.2	6	0.5	0.5
19	0.4	0.8	0.4	<i>ind</i>	<i>ind</i>	<i>ind</i>
22	0.4	0.8	0.4	0.05	0.1	1
25	<i>ind</i>	<i>ind</i>	0.07	0.4	0.4	0.38
30	<i>ind</i>	<i>ind</i>	<i>ind</i>	0.2	0.4	0.3
38	0.04	0.04	0.5	0.5	0.5	0.02

Tableau 4.3 Fréquences naturelles et déformées identifiables à partir des spectres résultants d'un impact dans l'axe des pistons

#### 4.1.3 Identification des modes

À la lumière des résultats expérimentaux exposés précédemment, il est possible d'identifier les 6 modes rigides principaux du moteur sur ses supports. Dans certains cas, il n'est pas possible d'identifier clairement les composantes de la déformée modale.

Il est difficile de conclure quant à la validité de l'amplitude des pics à 12 Hz. La très courte durée des impacts implique que l'amplitude de la force est très basse dans cette plage de fréquences. De plus, une différence significative entre les signaux du capteur A (un accéléromètre de moins bonne qualité) et ceux des capteurs C et D laisse envisager une erreur significative à cette fréquence. Ces signaux sont présentés à l'annexe B. On y note une très faible composante d'accélération dans les trois axes, c'est d'ailleurs ce qui est attendu pour une si faible fréquence. On ne relève pas ce problème en plus haute fréquence.

Les résultats sont présentés au tableau 4.4. La note *ind* signifie qu'il n'a pas été possible de détecter une composante à partir des résultats expérimentaux.

F(Hz)	Mvt
12	<i>ind</i>
19	<i>y, ind</i>
22	<i>y, <math>\alpha</math></i>
26	<i>z, ind</i>
30	<i>y, ind</i>
38	<i>z, <math>\theta</math></i>

Tableau 4.4 Identification des fréquences naturelles et des composantes principales des déformées modales à partir des FRF expérimentales

#### 4.1.4 Sources d'erreurs

Les résultats observés semblent cohérents (ordre de grandeur des fréquences naturelles attendu) et permettent d'identifier certains des modes rigides du moteur sur les supports ainsi que les principaux composants des déformées modales. Cependant, la résolution fréquentielle ne permet pas d'obtenir une définition précise des déformées modales. Ces erreurs sont attribuables à plusieurs facteurs.

#### Décomposition des forces

Il faut noter que les fonctions de transfert ne tiennent pas compte de la décomposition vectorielle de la force appliquée. C'est-à-dire que l'amplitude liée à une force unitaire de la réponse est calculée en fonction de l'amplitude du signal du marteau d'impact et non de la quantité vectorielle, tel qu'illustré à la figure 4.9.

Les fréquences naturelles et les modes propres peuvent quand même être utilisés en comparaison avec le modèle analytique, si l'on considère le fait que les forces appliquées sont décomposées vectoriellement.

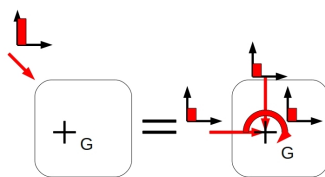


Figure 4.9 Décomposition des forces appliquées

## Découplage des mouvements

Le découplage des mouvements s'est avéré plutôt difficile. L'amplitude des rotations, tel qu'attendu, est beaucoup plus grande que l'amplitude des déplacements : la rigidité en rotation est plus faible d'un ou deux ordres de grandeur que la rigidité en translation. Ce fait combiné à la faible résolution en fréquence des spectres amène des erreurs de calculs. Il est possible de calculer la rotation autour d'un axe en analysant les déplacements générés dans les deux axes orthogonaux à l'axe de rotation. À titre d'exemple la rotation autour de l'axe des  $y$  a été calculée à partir des accélérations mesurées en  $x$  et en  $z$ . Les résultats divergent quelque peu (4.10).

De plus, l'analyse de la phase est un élément essentiel à l'analyse des mouvements principaux. À une fréquence de résonance, la phase varie de façon drastique. À cause de la faible résolution des spectres, ces variations de phase sont peu ou pas observées. L'erreur associée à la phase peut alors mener à une mauvaise interprétation des résultats.

## Calibration du marteau d'impact

Le laboratoire ne disposait pas d'un marteau instrumenté permettant de solliciter efficacement une structure de la taille du véhicule. Un marteau de plus grande taille a été instrumenté avec un accéléromètre uniaxial. La calibration a été faite en frappant sur une plaque supportée par deux capteurs de force. Le facteur de sensibilité a été déterminé en comparant les signaux mesurés lors d'un impact sur la plaque instrumentée. La rigidité du bout du marteau instrumenté fait en sorte qu'il est difficile d'obtenir de bons résultats en basse fréquence.

## 4.2 Conclusion de la section expérimentale

La méthode de reconstruction des forces tel que proposée par M.Lavoie (2009) a été améliorée pour mieux considérer l'inertie de rotation du moteur. À partir des signaux d'accélération

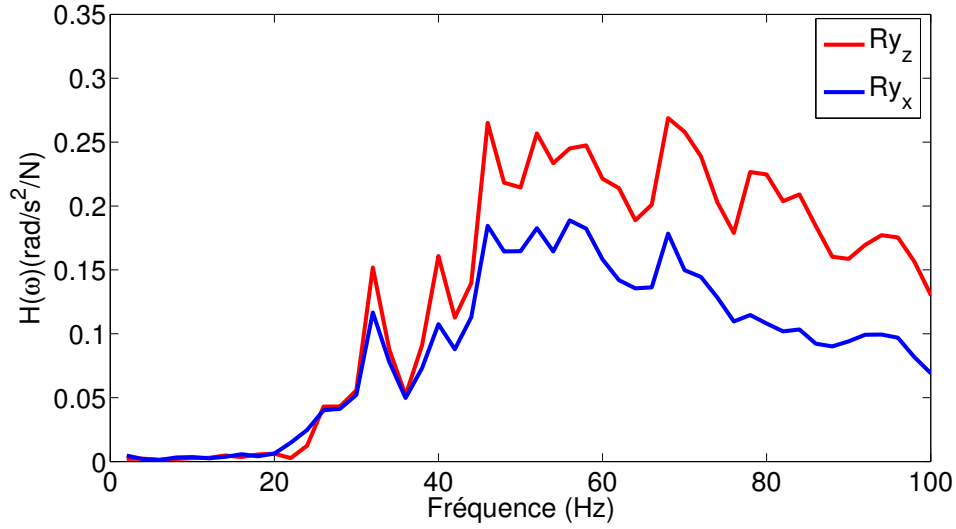


Figure 4.10 Comparaison de la rotation en y reconstruite à partir des accélérations mesurées en x et en z

et de force traités par A. Fillon (2009), le spectre des forces générées par le moteur est reconstruit. Ce spectre contient des informations fréquentielles, de phase et spatiales qui seront utilisées dans le modèle analytique présenté dans le prochain chapitre.

Les fonctions de transfert du système de support du moteur ont été obtenues expérimentalement par des essais d'impact dans différentes directions. Les spectres obtenus permettent de déterminer les fréquences naturelles du système. Ces spectres permettent aussi d'obtenir une approximation des déformées modales. Les fréquences naturelles sont toutefois trop rapprochées pour déterminer avec exactitude ces déformées. Néanmoins, les mouvements principaux peuvent être identifiés. Les résultats de ces travaux expérimentaux serviront à valider le modèle analytique dans le prochain chapitre.

## CHAPITRE 5

### Caractérisation du caoutchouc

Le processus de caractérisation du caoutchouc est bien documenté dans la littérature. La particularité de ce travail réside dans le fait que les courbes de caractérisation seront utilisées dans le processus de design. Cette section présente les résultats et les analyses des essais de caractérisation dynamique des supports de moteur. Une force harmonique pour des fréquences variant de 10 à 100 Hz est appliquée à différents angles (0, 60 et 90 degrés) et à différentes amplitudes. Il est considéré que les forces générées par le moteur en régime permanent génèrent des déplacements crête à crête de 0.1 à 0.3 mm. L'analyse se fait donc dans cette plage d'amplitudes. Une représentation schématique du montage expérimental utilisé pour la caractérisation est présenté à la figure 5.1.

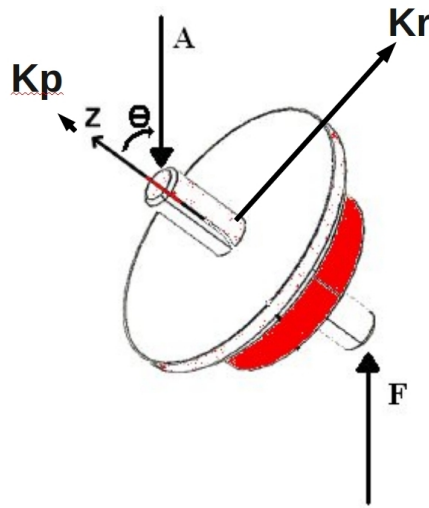


Figure 5.1 Schématisation des essais de caractérisation

#### 5.1 Rigidité en fonction de la fréquence

La caractérisation en fréquence permet de remarquer que la raideur du tampon augmente avec la fréquence, particulièrement dans l'axe de tension. Ce comportement attendu est similaire aux courbes de caractérisation observées dans la littérature (Thaijaroen et Harrison

(2010), Torvik et Bagley (1984). La figure 5.2 présente les courbes de caractérisation en fréquence obtenues pour trois différents angles de sollicitation.

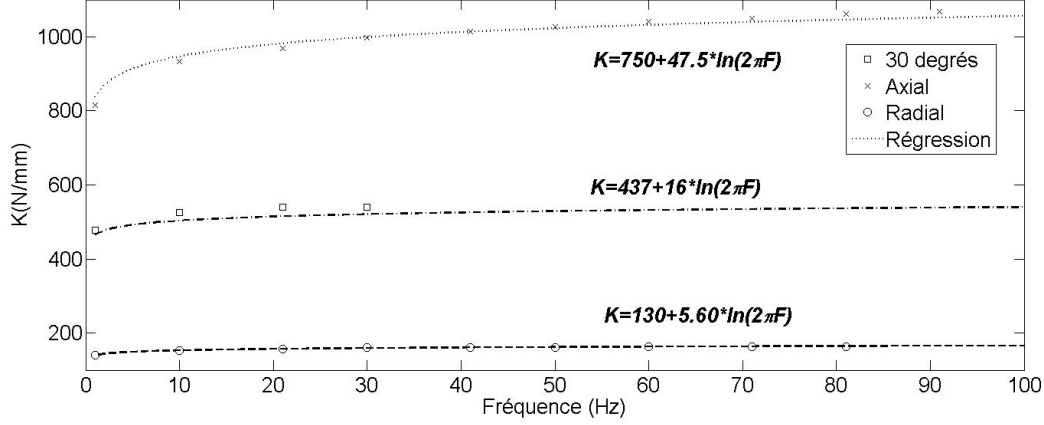


Figure 5.2 Rigidité en fonction de l'angle et de la fréquence

La rigidité peut être prédite adéquatement par une fonction de la forme  $K = K_s + K_d \ln(\omega)$ , où les indices  $s$  et  $d$  signifient respectivement statique et dynamique. Les paramètres trouvés par cette régression ne sont applicables qu'aux supports de cette géométrie et du même mélange de caoutchouc. Le montage expérimental utilisé pour déterminer la rigidité à 30 degrés n'a pas permis d'aller au-delà de 30Hz puisqu'à cette vitesse des problèmes de glissement apparaissent, ce qui vient biaiser les résultats. À priori, cette forme d'équation est transposable à d'autres formes de supports de moteurs.

## 5.2 Rigidité en fonction de l'orientation

Il est commun dans la littérature de traiter la rigidité en fonction de l'angle en utilisant des matrices de rotation d'Euler  $\mathbf{R}$ . Les axes de tension-compression  $K_p$  et de cisaillement ( $K_r$ ) sont identifiés à la figure 5.1.

$$\mathbf{K}_{x,y,z} = \mathbf{R} \mathbf{K}_{q,r,p} \mathbf{R}^T \quad (5.1)$$

Dans le cas de tampons circulaires,  $K_r = K_q$ , ce qui simplifie le résultat de la rotation de sorte que la rigidité à un angle  $\theta$  peut s'exprimer tel qu'à l'équation suivante pour une déformation uniaxiale.

$$k_{\theta} = (k_p \cos^2 \theta + k_r \sin^2 \theta) \quad (5.2)$$

Il a été démontré dans nos expériences que la raideur dynamique  $K_d$  suit bien cette relation. Cependant, le terme de raideur statique  $K_s$  n'est pas aussi bien corrélé avec la relation angulaire. Cette erreur est probablement due au montage ou à une erreur de manipulation lors de l'assemblage des éléments de fixation. La section supportant l'outillage est un long profilé circulaire qui est susceptible de flamber lors de l'application d'une force suffisamment élevée. En évaluant la déflexion possible (.05mm), on constate que cette déflexion est dans l'ordre de grandeur des déplacements imposés par les essais de traction (.2mm crête à crête à la figure 5.2). Il ne s'agit là que d'une approximation puisque le système réel est hyperstatique : la répartition des forces dépend des déformations. La force mesurée par la machine de traction s'exprime donc de la façon suivante, où  $y$  correspond au déplacement imposé par la machine et  $x$  au déplacement attribuable au flambement.

$$F_{\theta} = k_p \cos^2 \theta y + k_r \sin^2 \theta y + (k_p - k_r) \cos \theta \sin \theta x \quad (5.3)$$

Par cette relation, on obtient une rigidité de 417 N/mm dans l'axe à 60 degrés de l'axe de tension-compression avec une erreur inférieure à 5%. Il est à noter que la relation en angle telle que formulée dans la littérature contient intrinsèquement une relation de non-linéarité : avec la variation de l'angle vient une variation de l'amplitude de déformation en tension-compression et en cisaillement, donc, une variation des raideurs respectives. Ce fait est considéré dans le modèle dynamique proposé dans ce mémoire au chapitre 6.

### 5.3 Rigidité en fonction de l'amplitude

Le même type d'essais a été réalisé sur les supports du moteur en faisant varier l'amplitude de la sollicitation. On remarque à la figure 5.3 que la rigidité diminue lorsque l'amplitude augmente et que cette dépendance à l'amplitude semble être constante dans le spectre des fréquences considérées. La diminution de la rigidité avec l'amplitude ne suit pas tout à fait ce qui est normalement vu dans des éléments simples de caoutchouc isotropique. Les courbes contrainte déformation montrent une progression beaucoup plus rapide de la diminution de la rigidité effective avec l'amplitude des déformations. Dans une pièce mécanique plus complexe, la distribution des contraintes n'est pas uniforme et varie aussi en fonction de l'amplitude de déformation. À mesure que la pièce se déforme, le volume de caoutchouc déformé tend à augmenter, ce qui limite la diminution de la raideur avec l'amplitude. La caractérisation directe de la pièce permet de bien modéliser ce phénomène qui sera appelé effet de forme au long du mémoire.



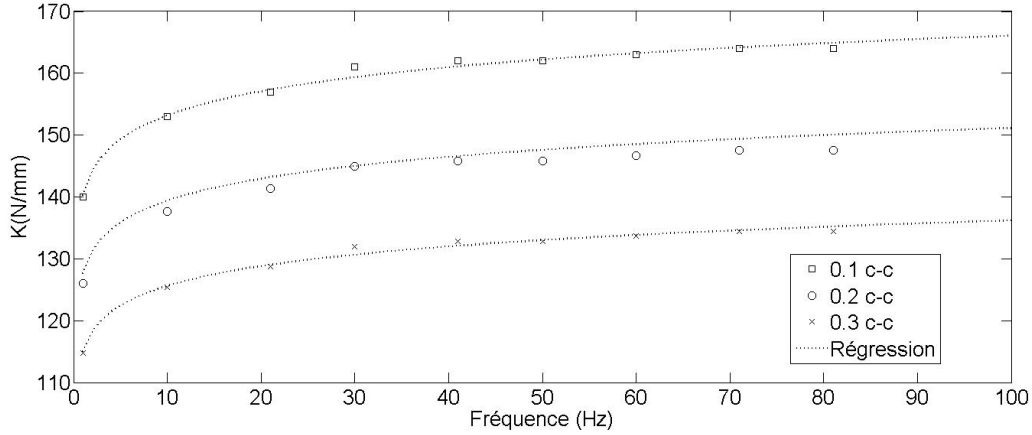


Figure 5.3 Rigidité en fonction de l'amplitude

Il est commun dans la littérature d'exprimer la dépendance à l'amplitude à l'aide d'un polynôme. Ce type de fonction exprime bien la relation entre la rigidité dynamique et l'amplitude dans la plage étudiée. Dans le cas étudié la contribution de l'amplitude est proportionnelle à la racine carrée de l'amplitude de déformation.

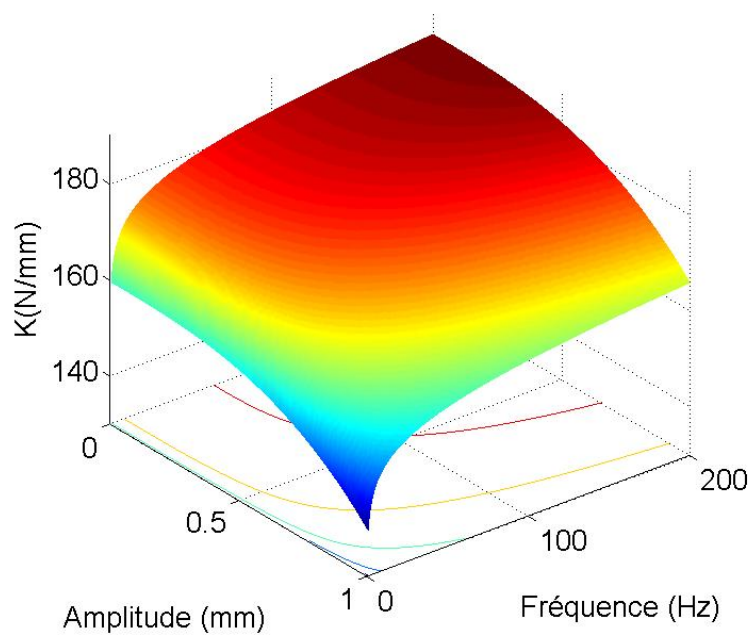
$$k^*(x, \omega) = k_s + k_d - k_x \sqrt{x} \quad (5.4)$$

Comme illustré dans les figures 5.4a) et 5.4b), la rigidité des supports est établie dans les 2 directions principales et pour toutes les conditions d'utilisation répertoriées dans les essais expérimentaux sur le véhicule. Ces fonctions de caractérisation peuvent être utilisées dans le modèle complet du véhicule.

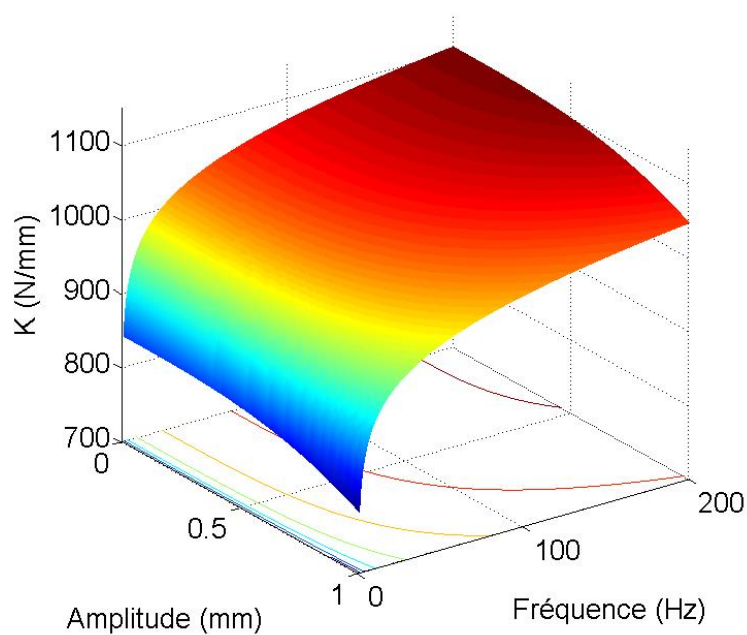
#### 5.4 Amortissement en fonction de l'amplitude

À partir des mêmes essais expérimentaux, la valeur C du coefficient d'amortissement peut être obtenue. Les valeurs sont présentées en fonction de la fréquence et de l'angle (figure 5.5) ou de l'amplitude (figure 5.6). Une dépendance à la fréquence et à l'amplitude est observée, mais elle diffère de celle observée dans les courbes de rigidité.

La dépendance de l'amortissement à la fréquence est très forte. Selon la fréquence du déplacement imposé, l'amortissement varie entre 6 et 0.4 dans l'axe principal (figure 5.6). Il a été démontré dans la littérature que l'évaluation de l'amortissement est un paramètre primordial pour modéliser le comportement dynamique du véhicule. La variation significative de la force viscoélastique en témoigne.



(a) Axe de cisaillement



(b) Axe de tension-compression

Figure 5.4 Rigidité des deux axes principaux du support en fonction de l'amplitude et de la fréquence

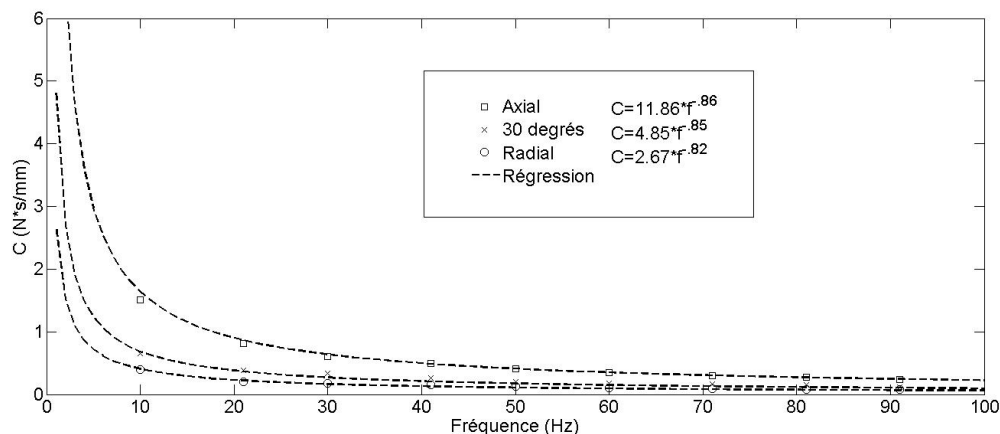


Figure 5.5 Amortissement en fonction de l'angle

Le mélange de caoutchouc utilisé possède des propriétés très intéressantes. L'objectif principal des systèmes de support de moteur est d'isoler le châssis des forces générées par le moteur tout en limitant la mobilité de ce dernier. Un amortissement élevé en basse fréquence permet d'améliorer les performances du système dans cette plage : un taux d'amortissement élevé permet de réduire l'amplitude des premières résonances. En haute fréquence, il n'y a plus de risque de résonance, les forces visqueuses s'accroissent et sont transmises au châssis. Un taux d'amortissement plus faible permet de limiter la transmission de ces forces.

Les valeurs d'amortissement selon l'angle suivent les relations établies pour les variations des rigidités. Les valeurs identifiées sont aussi proportionnelles aux valeurs observées pour la rigidité. Cette proportionalité pourra être utilisée dans les optimisations du prochain chapitre.

Finalement, on observe à la figure 5.6 que la dépendance de l'amortissement à l'amplitude est négligeable voire inexistante.

## 5.5 Représentation dynamique des supports

Les études de caractérisation et les régressions non-linéaires présentées permettent de représenter le comportement dynamique de la pièce pour la gamme de fréquences, d'amplitudes et d'angles de la plage de fonctionnement *in situ* du véhicule. Il est important de noter que les fonctions obtenues ne permettent que de représenter ce qui est observé expérimentalement sur ce type de support. Ces fonctions ne se basent pas directement sur

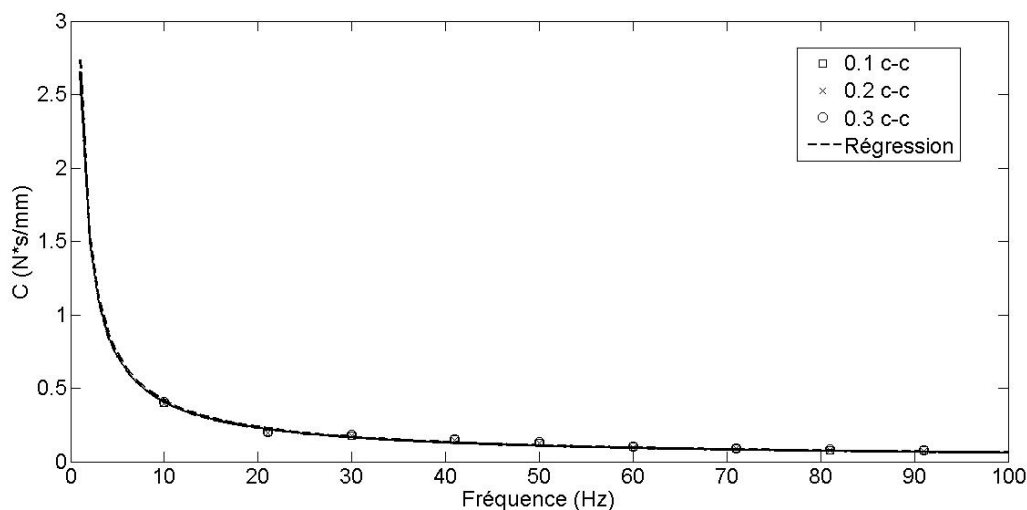


Figure 5.6 Amortissement en fonction de l'amplitude

des phénomènes physiques connus.

Les termes utilisés pour la représentation du comportement viscoélastique s'apparentent beaucoup à ceux des séries de Prony. Dans les séries de Prony, la dépendance à la fréquence est modélisée par un nombre complexe, ce qui est utilisé dans le présent travail. Il a été tenté d'utiliser la forme des séries de Prony pour représenter le comportement de la pièce, mais les fonctions présentées ici ont une meilleure corrélation avec les résultats expérimentaux. Il faut d'ailleurs rappeler que les séries de Prony permettent de modéliser les matériaux et non les effets de forme des pièces.

La dépendance des paramètres  $K$  et  $C$  à l'amplitude, soit l'hyperélasticité, est modélisée par une fonction polynomiale. Contrairement aux fonctions représentant la contribution des forces visqueuses choisie, cette forme est très largement utilisée dans la littérature. Cette fonction correspond aussi bien aux tendances des courbes force-déplacement obtenues par des essais de traction quasi-statique sur des bandelettes du même caoutchouc par Lavoie (2009). Selon la courbe de caractérisation force-déplacement obtenue, la fonction polynomiale choisie peut représenter le comportement de la pièce pour des déformations variant de 0 à 30%, ce qui correspond à des déplacements allant jusqu'à 3mm. Au delà de cette limite la fonction polynomiale utilisée ne peut plus représenter adéquatement le comportement de la pièce : le caoutchouc se rigidifie.

## 5.6 Phénomènes vibratoires non-linéaires

Les caractérisations réalisées à l'aide de la machine de traction ont permis d'identifier les propriétés mécanique du support pour des amplitudes et des fréquences discrètes et uniques. Il a été observé sur les courbes de caractérisation que les comportements hyperélastiques et viscoélastiques sont indépendants. Cependant, certains phénomènes présents dans les véhicules n'ont pu être reproduits avec la machine de traction. Ces phénomènes sont décrits puis modélisés dans cette section.

### 5.6.1 Comportement sous sollicitation multi-fréquentielle

La rigidité du tampon a été caractérisée pour des sollicitations mécaniques à une seule fréquence. Comme la rigidité dépend de l'amplitude des oscillations du tampon, une analyse doit être faite afin de modéliser correctement le comportement du moteur lorsque des forces à fréquences différentes sont appliquées sur la pièce. Pour ce faire, le cas simple d'un ressort non-linéaire est utilisé. L'équation de la raideur du ressort est la suivante, où  $x$  est l'allongement du ressort.

$$K_x = K + \alpha\sqrt{x} \implies F_K = (K + \alpha\sqrt{x})x \quad (5.5)$$

### Analyse dans le domaine temporel

Lorsqu'une seule force est appliquée l'équation de rigidité est approximée par une valeur  $K^*$ . Tel que montré à la figure 5.7, l'approximation linéaire permet de bien approximer les valeurs extrêmes du déplacement, sans toutefois représenter parfaitement le comportement réel du ressort.

Lorsque des forces de spectres complexes sont appliqués il n'est plus possible de traiter les fréquences indépendamment comme dans un modèle linéaire. Si l'on considère deux fréquences de sollicitation, on peut approximer que pour plusieurs cycles la composante de fréquence la plus élevée oscillera en moyenne autour de la valeur RMS de la composante de basse fréquence :  $X_{rms} = x_{max}/\sqrt{2}$ . La valeur RMS est utilisée puisque le signe ou la phase des signaux n'a pas d'effet.

Dans le cas de l'application du véhicule, on peut retrouver une multitude de fréquences lors du fonctionnement du moteur. Pour évaluer l'amplitude moyenne autour de laquelle les déplacements secondaires oscillent, il est possible d'utiliser la densité spectrale des déplacements

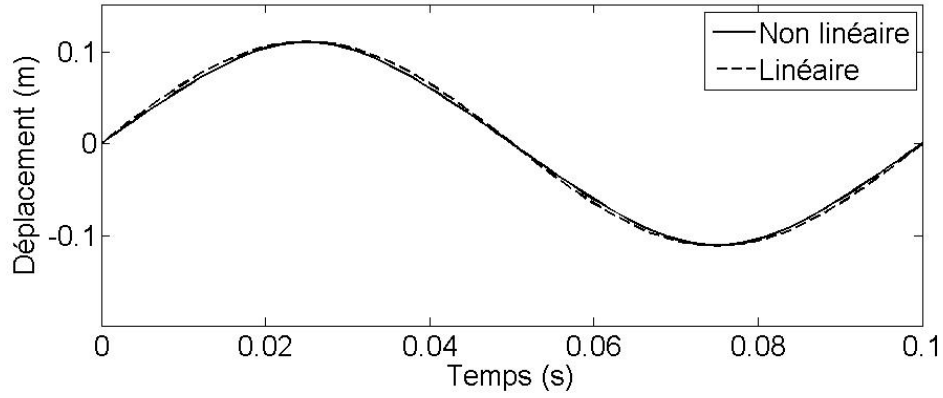


Figure 5.7 Réponse du ressort sous l'application d'une force à une fréquence

de plus basse fréquence. Ainsi, le déplacement s'effectuera en moyenne autour de cette valeur. L'amplitude de la première fréquence est aussi modulée par la deuxième de sorte que la réponse spectrale des fréquences inférieures est aussi augmentée. L'évaluation de la rigidité à une fréquence donnée est donc évaluée ainsi, où l'indices  $d$  indique que le terme est dépendant de la fréquence et l'indice  $x$  signifie que le terme est dépendant de l'amplitude. La densité spectrale est définie par le terme  $\tilde{D}$ .

$$K(\omega) = K_d - K_x(x_\omega + \tilde{D}(0 \leq \omega \leq \omega_{max}))(5.6)$$

À titre d'exemple, la méthode est appliquée à un ressort non-linéaire, ce qui nécessite une approche itérative. La figure 5.8 présente la comparaison de la méthode à la solution exacte.

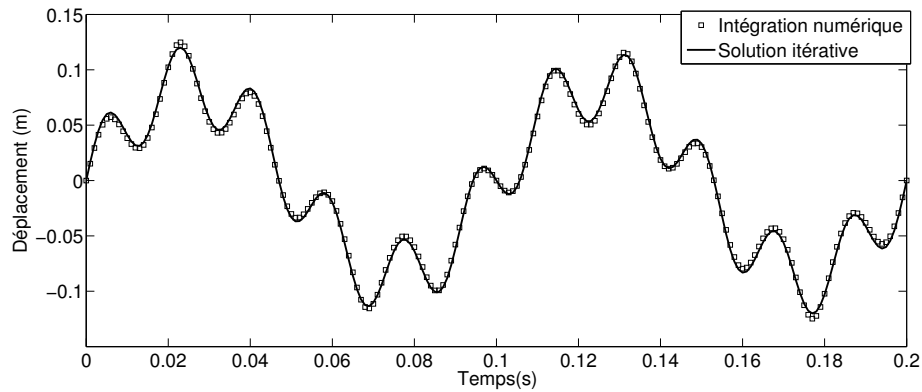


Figure 5.8 Réponse du ressort sous l'application d'une force à deux fréquences

## Analyse dans le domaine des fréquences

Finalement, pour compléter la validation, un véritable spectre de force est appliqué au système analysé (figure 5.9).

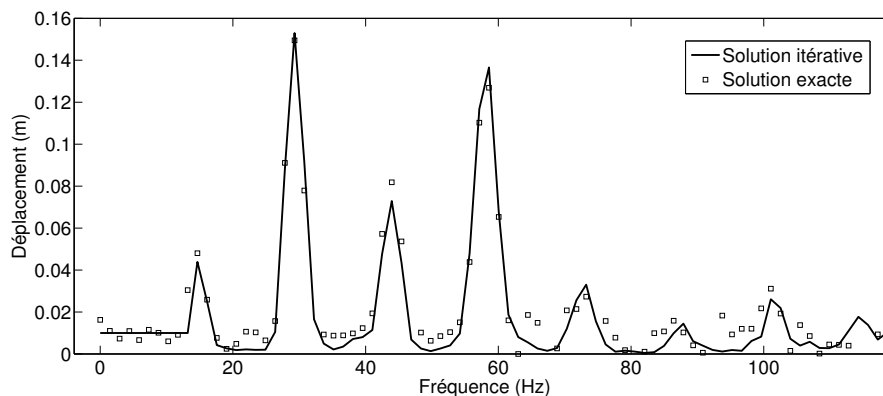


Figure 5.9 Réponse du ressort sous l'application d'un véritable spectre de force

La densité spectrale permet donc de bien modéliser l'effet des sollicitations multi-fréquentielles. Cette modélisation est implantée dans le modèle principal en calculant les déplacements de chacun des supports et dans chacun des axes pour toutes les fréquences. Les rigidités effectives de chacun des supports sont recalculées puis une itération finale permet d'obtenir les résultats.

### 5.6.2 Résonance d'un système non-linéaire

La résonance d'un système non-linéaire comporte une certaine ambiguïté. Lorsque la résonance s'installe, l'amplitude des déplacements augmente. Pour un système linéaire l'amplitude des déplacements augmente jusqu'à ce que la puissance induite dans le système corresponde à la puissance dissipée par l'amortissement. Il y a donc une différence du niveau de déplacement, donc des déformations, entre le début de la résonance et la période de stabilisation. Pour un système non-linéaire, la fonction de transfert et la fréquence naturelle dépendent de l'amplitude des déformations. Par conséquent, lorsqu'un système non-linéaire tente de se stabiliser, la fréquence naturelle n'est plus la même à cause de la variation de la raideur effective.

Ce fait est observé dans le domaine des fréquences : l'algorithme de résolution converge difficilement vers une amplitude de déplacement ou ne converge tout simplement pas. Les valeurs obtenues sont cycliques : le système varie entre un état de résonance et un état de

non-résonance. Pour tenter de modéliser le comportement moyen du système, il est proposé de résoudre les équations à partir des valeurs moyennes de déplacement qu'il est possible d'obtenir dans le domaine temporel. Les réponses maximales et minimales qu'il est possible d'observer pour un système à un degré de liberté est présenté à la figure 5.10).

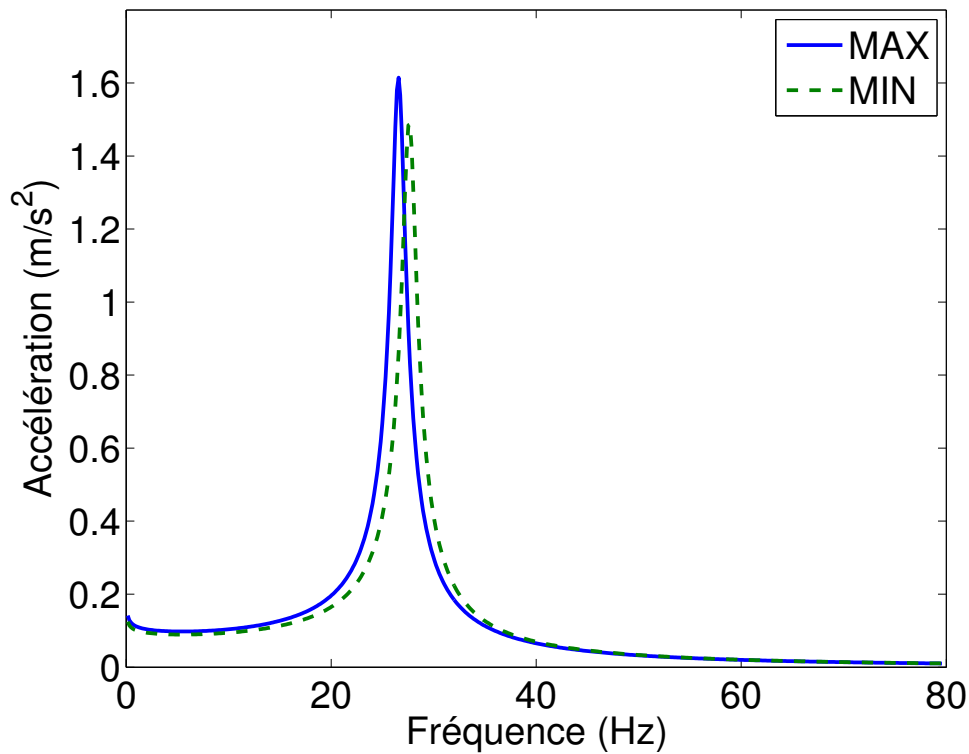


Figure 5.10 Réponses possibles d'un système masse ressort non linéaire

Les deux courbes représentent les fonctions de transfert associées aux déplacements maximal et minimal identifiés dans le processus de convergence de la solution des équations. La réponse dynamique du système se situe donc entre les deux courbes. Il est proposé d'utiliser la valeur moyenne des déplacements obtenus dans le processus de calcul pour déterminer la valeur efficace des rigidités dans la plage de résonance. Pour ce faire, une fonction permet de détecter les résonances et d'évaluer les déplacements des points d'attaches au moteur et d'en faire la moyenne. Dans le cas du système à 6 degrés de liberté étudié, les déplacements sont calculés à chacun des supports et dans chacun des 3 axes orthogonaux.



## 5.7 Conclusion de la section expérimentale

Le comportement dynamique du support de moteur utilisé sur le véhicule a été caractérisé. Les courbes obtenues sont exprimées sous forme mathématique à l'aide de régressions non-linéaires. Ces courbes de caractérisation permettent de représenter le comportement dynamique de la pièce en fonction de la fréquence, de l'amplitude et de l'angle de sollicitation. Ces équations mathématiques seront utilisées dans le modèle complet du véhicule pour simuler le comportement réel des supports.

## CHAPITRE 6

### Modélisation et optimisation

Cette section présente le modèle analytique qui a été conçu pour des fins d'optimisation. Les propriétés non-linéaires des supports de moteur obtenues expérimentalement sont utilisées directement dans le modèle. Certains phénomènes vibratoires dus aux non-linéarités du caoutchouc sont considérés dans les calculs. Les équations établies sont d'abord validées en comparant les résultats obtenus à ceux d'un modèle de la littérature. Le modèle complet est quant à lui validé par les fonctions de transfert obtenues expérimentalement.

Le modèle validé est ensuite utilisé pour réaliser des optimisations des paramètres des supports du moteur.

#### 6.1 Structure et paramètres du modèle

Le modèle est construit en se basant sur les équations du mouvement de la section 2.1. Rappelons que les équations du mouvement sont obtenues en effectuant l'équilibre des forces et des moments autour du centre de masse du moteur. L'équation finale s'exprime sous forme matricielle, dans le domaine des fréquences, de la façon suivante.

$$(-\mathbf{M}\omega^2 + \mathbf{C}j\omega + \mathbf{K})[q] = [F] \quad (6.1)$$

Dans ce modèle les fonctions de caractérisation des supports de moteur seront utilisées. Les raideurs ( $\mathbf{K}$ ) et les taux d'amortissements ( $\mathbf{C}$ ) expérimentaux sont intégrées dans le modèle.

$$(-\mathbf{M}\omega^2 + \mathbf{C}(\omega, \mathbf{x})j\omega + \mathbf{K}(\omega, \mathbf{x}))[q] = [F] \quad (6.2)$$

À priori, il n'est pas possible de résoudre analytiquement cette équation différentielle non-linéaire. Un algorithme de calcul est utilisé pour résoudre l'équation de façon itérative.

##### 6.1.1 Structure de l'algorithme de calcul

L'algorithme de calcul permet de résoudre les équations du mouvement du moteur sur ses supports en considérant le comportement non linéaire du caoutchouc. La résolution se fait

dans le domaine des fréquences. Pour chacune des fréquences d'excitation, l'algorithme calcule les déplacements de chacun des supports par convergence ; 5 itérations sont nécessaires à la convergence des déplacements. Après un premier balayage en fréquence, la densité spectrale des déplacements est calculée. La densité spectrale est utilisée pour modéliser les effets combinatoires du système sous excitation à plusieurs fréquences. Un deuxième balayage est fait en ajoutant la densité spectrale aux déplacements de chacun des supports pour permettre de calculer la raideur effective. La dernière itération se fait en solutionnant l'équation dynamique en considérant ces rigidités effectives. À proximité d'une résonance, il est possible que les déplacements ne convergent pas, en raison des non-linéarités. Le déplacement moyen observé dans les 5 itérations nécessaires à la convergence des déplacements est utilisé pour calculer la raideur effective des supports aux fréquences de résonance.

### 6.1.2 Paramètres et dimensions

La matrice de masse a été déterminée à partir d'un solide équivalent possédant les dimensions hors tout du moteur et ayant le centre de masse au même endroit. La méthode utilisée donne des valeurs acceptables, l'ordre de grandeur correspond bien à ce type de moteur.

$$M = \begin{bmatrix} 62 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 62 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 62 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4.2 & 0.032 & -.26 \\ 0 & 0 & 0 & .032 & 1.9 & 0.081 \\ 0 & 0 & 0 & -0.26 & 0.081 & 3.9 \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

La position et l'orientation des supports sont des paramètres connus. Ils sont déterminés à partir du dessin technique du moteur indiquant la position du centre de masse et le modèle CAD de la structure du véhicule. Les vecteurs de position présentés au tableau 6.1 partent du centre de masse du moteur vers les supports.

Finalement, les valeurs de raideur et d'amortissement issues de la caractérisation dyna-

Support	x(mm)	y(mm)	z(mm)
A	-185	290	-135
B	110	290	-135
C	-185	-208	-135
D	110	-208	-135

Tableau 6.1 Distance des supports de moteur par rapport au centre de masse

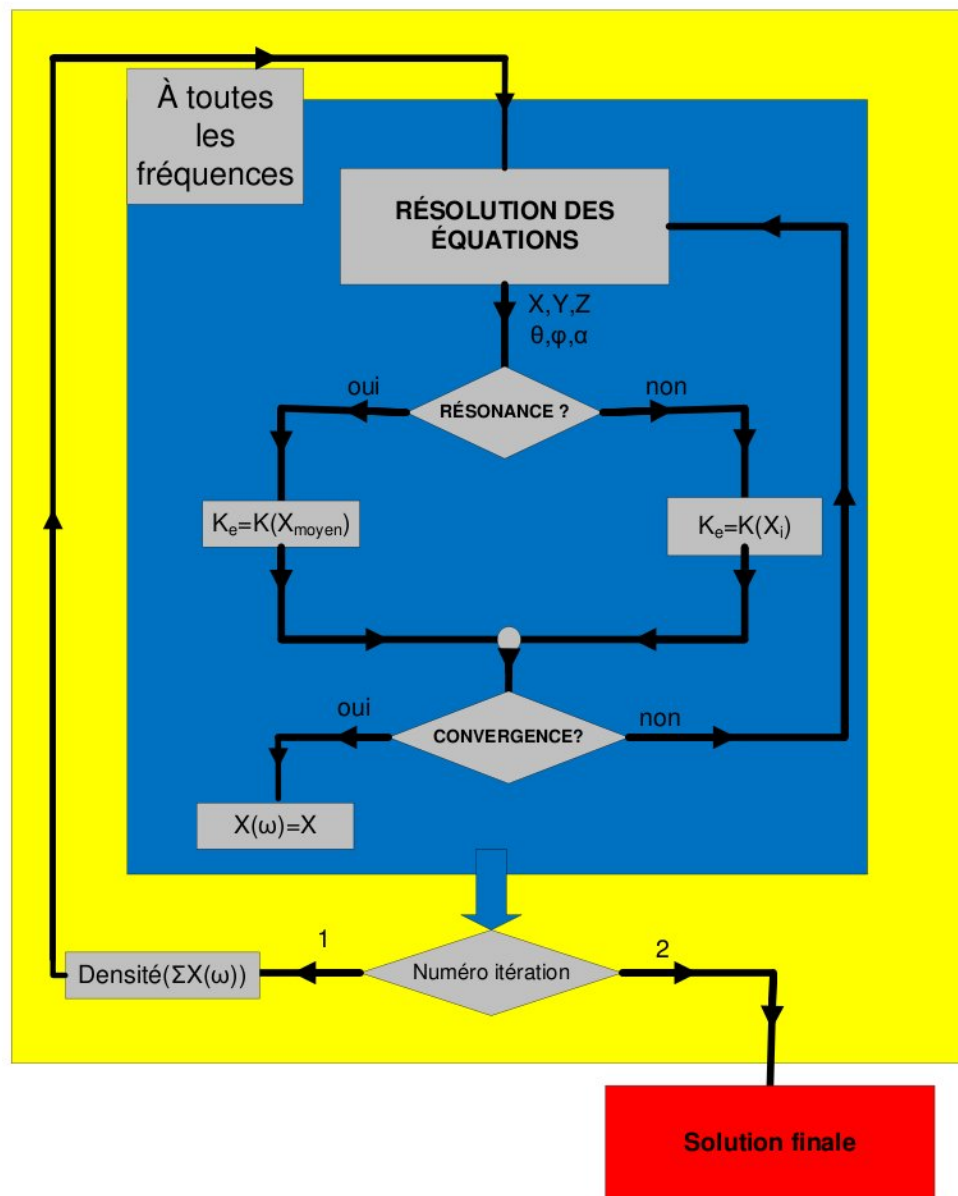


Figure 6.1 Structure de l'algorithme de calcul

mique des supports sont utilisées dans le modèle (figures 5.2, 5.3 et 5.5).

## 6.2 Validation du modèle

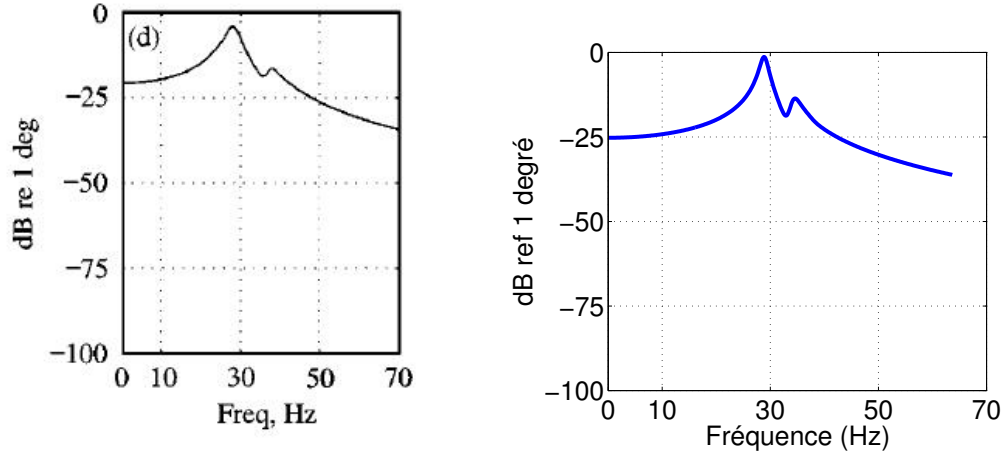
Avant de pouvoir utiliser le modèle pour réaliser des optimisations, il est nécessaire d'en déterminer la validité et les limites. Pour ce faire, les déplacements calculés sont comparés à ceux obtenus par un modèle équivalent de la littérature. Puis, les fréquences naturelles et les formes des modes sont comparées aux résultats des FRF expérimentales. Les accélérations du centre de masse du moteur sont aussi comparées aux accélérations obtenues expérimentalement. Le modèle non-linéaire est comparé à un modèle linéaire pour en valider sa pertinence.

### 6.2.1 Comparaison du modèle avec la littérature

La base de calcul du modèle, c'est-à-dire les équations du mouvement, est comparée au modèle de Jeong et Singh (2000). Dans leur publication, les auteurs analysent les effets du couplage de l'axe d'application du couple sur les autres mouvements rigides. Pour ce faire, ils proposent d'étudier un système de supports de moteur aux dimensions similaires à celui étudié dans ce mémoire. Les raideurs dans leur modèle sont linéaires. Cependant, ils ne spécifient pas les valeurs de l'amortissement. Néanmoins, il est tout de même possible de comparer les résultats avec ceux donnés par la base de calcul du modèle présenté dans ce mémoire. Pour permettre la comparaison des résultats, un amortissement proportionnel à la raideur a été utilisé.

Dans l'exemple présenté par Jeong et Singh (2000), un couple de 100 Nm est appliqué à toutes les fréquences (de 1 à 70 Hz) dans l'axe  $T_{ra}$  ou axe d'application du couple moteur. Les résultats de leurs simulations ainsi que les résultats obtenus par le présent modèle sont donnés à la figure 6.2.

Les déplacements obtenus se confondent parfaitement. La réponse dans les autres axes à l'application du couple est présentée en annexe. Dans tous les cas, les fréquences naturelles et l'amplitude de la réponse se confondent. La valeur ou la technique de représentation de l'amortissement de Jeong et Singh (2000) n'étant pas disponibles, on remarque quelques différences dans les spectres en dehors des zones de résonance. Cependant, ces erreurs ne sont pas significatives, compte tenu de l'utilisation prévue du modèle. Il semble que l'amortissement utilisé est plus faible que celui utilisé par Jeong et Singh (2000) : les pics de la figure de référence sont un peu plus larges et de plus faibles amplitudes.



(a) Résultats obtenus par Jeong et Singh (2000) (b) Résultats obtenus par le modèle du mémoire

Figure 6.2 Comparaison de la réponse du système de Jeong et Singh (2000) en rotation  $\theta$  suite à l'application d'un couple de 100 Nm dans l'axe  $T_{ra}$

### 6.2.2 Comparaison des fréquences naturelles

Trois méthodes sont utilisées pour comparer les fréquences naturelles et les déformées modales à ce qui a été observé expérimentalement : un modèle linéaire, le modèle non-linéaire et un modèle quasi-linéaire.

#### Le modèle linéaire

Pour le modèle linéaire, les propriétés dynamiques des supports à 1 Hz et un déplacement de 0.1 mm sont utilisées. Ce sont les paramètres généralement utilisés pour concevoir un système de supports de moteur. Aucune itération n'est requise, les fréquences naturelles et les mouvements associés sont calculés à partir des valeurs propres et des vecteurs propres du système linéaire à 6 degrés de liberté.

#### Modèle non-linéaire

Le modèle non-linéaire est construit, tel que mentionné précédemment, en utilisant les raideurs et les taux d'amortissement caractérisés expérimentalement. Il n'est pas possible de

déterminer les fréquences naturelles par le calcul des valeurs propres : pour y parvenir les paramètres en fonction de la fréquence doivent avoir la forme d'un polynôme. Alors, des forces, d'amplitudes correspondant aux forces appliquées expérimentalement, sont appliquées dans toutes les directions. Les fréquences naturelles sont déterminées par l'analyse des spectres résultants.

## Modèle quasi-linéaire

Une version simplifiée du modèle est utilisée pour évaluer rapidement les valeurs propres et les vecteurs propres du modèle. La dépendance à la fréquence de la rigidité et de l'amortissement est approximée par une droite, ce qui permet d'utiliser la méthode des valeurs propres. Les équations des droites sont déterminées de sorte que la correspondance avec les propriétés dynamiques expérimentales soit la meilleure dans la zone de 10 à 40 Hz : plage des fréquences naturelles qui nous intéresse. L'équation du problème aux valeurs propres est la suivante.

$$\det(-M\lambda^2 + C_f j \lambda^2 + C j \lambda + K_f \lambda + K) = 0 \quad (6.4)$$

L'indice  $f$  signifie que le terme dépend de la fréquence. Dans cette évaluation, le caractère hyperélastique des supports de moteur n'est pas considéré. On s'attend donc à une légère surévaluation des fréquences naturelles

## Présentation des résultats

Les fréquences naturelles et les mouvements principaux calculés par les méthodes précédentes sont comparés au tableau 6.2.

Expérimental		Modèle linéaire		Modèle non-linéaire		Modèle quasi-linéaire	
F(Hz)	Mvt	F(Hz)	Mvt	F(Hz)	Mvt	F(Hz)	Mvt
12	<i>ind, ind</i>	13	<i>x, <math>\phi</math></i>	13.5	<i>x, <math>\phi</math></i>	13.2	<i>x, <math>\phi</math></i>
19	<i>y, ind</i>	18	<i>y <math>\theta</math></i>	20	<i>y <math>\theta</math></i>	19.5	<i>y <math>\theta</math></i>
22	<i>y, <math>\alpha</math></i>	22	<i>y</i>	23	<i>y, <math>\alpha</math></i>	22.9	<i>y, <math>\alpha</math></i>
26	<i>z, ind.</i>	25	<i>z, <math>\theta</math></i>	26	<i>z, <math>\theta</math></i>	25.5	<i>z, <math>\theta</math></i>
30	<i>y, ind</i>	28	<i>y, <math>\alpha</math></i>	31	<i>y, <math>\alpha</math></i>	30.4	<i>y, <math>\alpha</math></i>
38	<i>z, <math>\theta</math></i>	34	<i>z, <math>\theta, \phi</math></i>	38	<i>z, <math>\theta, \phi</math></i>	38.6	<i>z, <math>\phi, \theta</math></i>

Tableau 6.2 Comparaison des fréquences naturelles et des déformées modales entre les résultats expérimentaux et les résultats des modèles

On remarque une très grande similitude entre les résultats expérimentaux et les modèles linéaire, non linéaire et quasi-linéaire. Le modèle quasi-linéaire est celui qui permet d'obtenir la valeur des fréquences naturelles avec le plus de précision. De plus, pour la plupart des modes, les mouvements identifiés et la proportion de leur contribution à la déformée modale correspond aussi.

Les fréquences naturelles identifiées à partir des spectres simulés du modèle non-linéaire dépendent fortement des forces appliquées dans le modèle. Les forces ont été choisies pour correspondre le plus possible (amplitude, orientation et point d'application) à la force appliquée lors des expériences. En réalité, la durée et la force des impacts appliqués manuellement diffèrent d'une fois à l'autre ; le résultat obtenu est donc la moyenne de tous ces impacts. C'est probablement pourquoi les fréquences naturelles identifiées par la résolution des valeurs propres est plus précise.

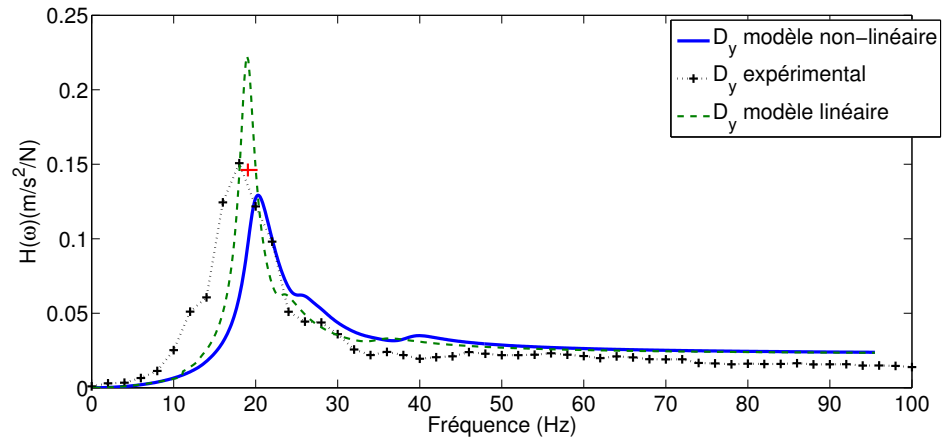
Outre la déformée modale du premier mode, on peut donc conclure que les trois modèles permettent d'évaluer correctement les fréquences naturelles et les mouvements principaux associés. La proportion et la forme des pics est analysée par la comparaison directe des fonctions de transfert dans la prochaine section.

### 6.2.3 Comparaison des fonctions de transfert

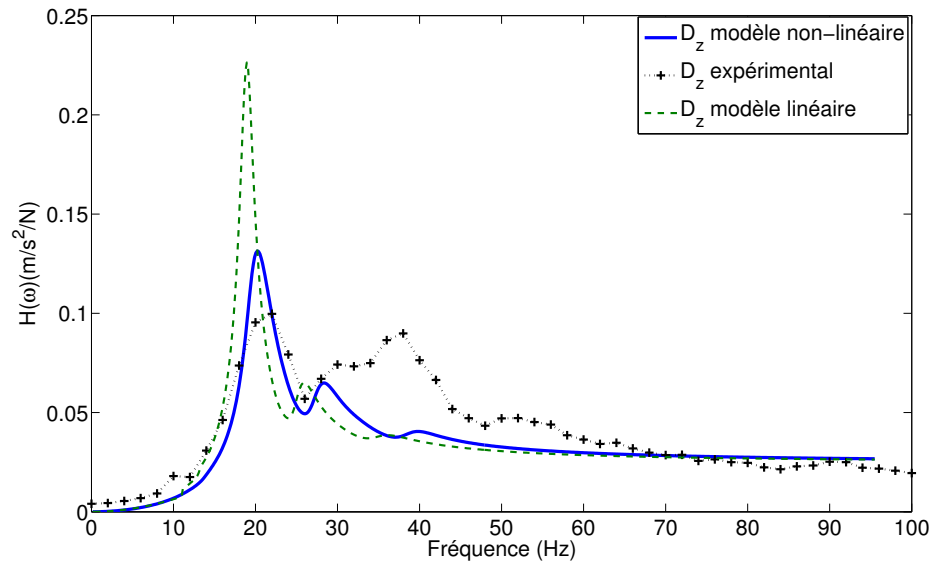
Les fonctions de transfert obtenues expérimentalement (figure 4.7) sont aussi utilisées pour valider le modèle. Les accélérations mesurées à chacun des points d'ancrage sont aussi utilisées aux fins de comparaison. Pour comparer les résultats, un changement de repère (équations 4.2 et 4.3) des déplacements et rotations du système d'axe global du véhicule obtenues par simulation est appliqué. Le changement de repère permet de calculer les accélérations par unité de force aux points d'attache des capteurs. La figure 6.3 montre la comparaison des accélérations par unité de force dans le repère local du support arrière gauche pour le modèle linéaire, le modèle non-linéaire et les résultats expérimentaux. Malgré le fait que les opérations matricielles ne soient pas appliquées sur les spectres expérimentaux, ils n'en demeurent pas moins très bruités. Les signaux des axes  $y$  et  $z$  sont utilisés puisque les accélérations dans ces axes sont plus grandes et que par conséquent, ces spectres ont un meilleur ratio signal sur bruit. Sur la figure (a) la croix indique la position réelle du pic, sa position a été déterminée en prolongeant les courbes de montée et de descente du pic.

On observe premièrement que les spectres du modèle non-linéaire correspondent beaucoup mieux aux spectres expérimentaux que ceux du modèle linéaire. La similitude est notée par la correspondance des fréquences naturelles et de la proportion entre l'amplitude des pics





(a) Fonction de transfert en y



(b) Fonction de transfert en z

Figure 6.3 Comparaison des accélérations en y et en z au support arrière-gauche entre les résultats expérimentaux et les simulations

de résonance. Sans même se référer au spectre expérimental, il est possible de constater des différences significatives entre le modèle linéaire et le modèle non-linéaire. Ce fait tend à démontrer la nécessité de considérer les non-linéarités dans la modélisation et l'optimisation de supports de moteur.

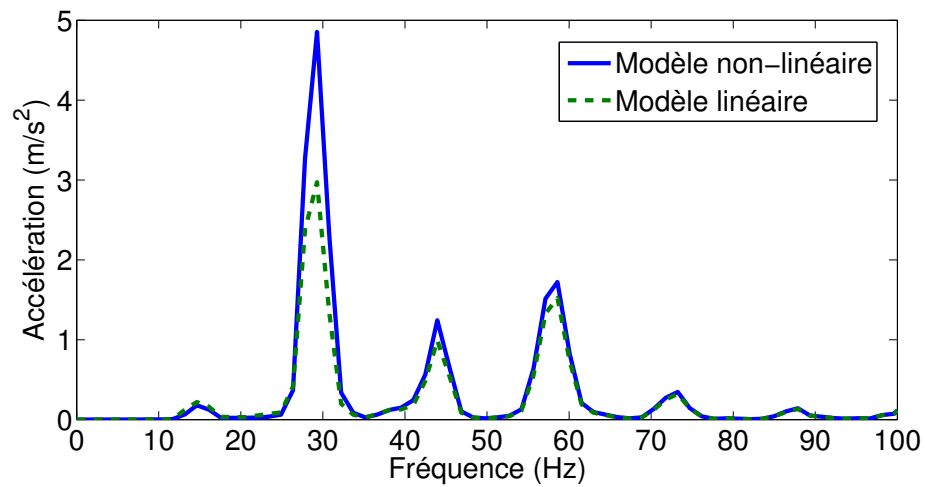
#### 6.2.4 Comparaison de la réponse forcée

À partir des forces mesurées expérimentalement par la méthode des capteurs de force, le spectre d'accélération *in situ* peut être simulé. Rappelons que les essais pour reconstruire les forces expérimentalement sont faits en retirant les supports. Les spectres d'accélération qui y sont associés ne peuvent donc être utilisés en guise de comparaison. D'autres essais ont permis d'obtenir les spectres d'accélération *in situ*, cependant ces spectres n'ont pas été acquis à la même vitesse de rotation du moteur. L'ordre de grandeur des accélérations correspond tout de même à celui des mesures expérimentales. De plus, la proportion des pics d'accélération est cohérente avec les fréquences naturelles identifiées tant par les simulation que par les essais de FRF. C'est-à-dire que l'on retrouve une plus grande accélération dans les plages où des fréquences naturelles sont identifiées. Les spectres d'accélération expérimentaux et numériques dans l'axe vertical sont montrés à la figure 6.4.

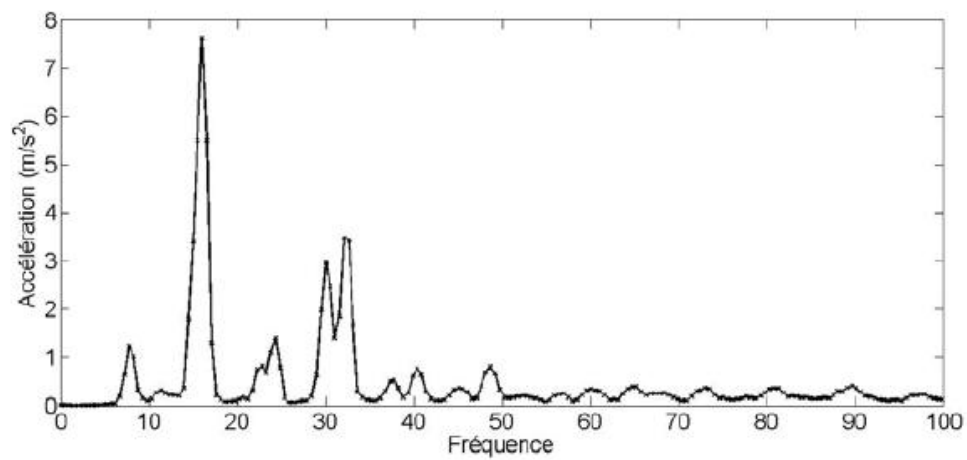
#### 6.2.5 Effet de l'amplitude

Il a été montré dans le chapitre 4, que la raideur des supports tend à diminuer lorsque la déformation du caoutchouc augmente. Pour observer comment ce comportement se traduit dans le modèle complet du véhicule, des forces et des moments sont appliquées dans toutes les directions. À la figure 6.5, on compare les fonctions de transfert pour des forces de différentes amplitudes.

On note bien le déplacement des fréquences naturelles, environ 2 Hz, causé par la diminution de la raideur. Il est intéressant de constater également que l'accélération par unité de force diminue lorsque la force augmente : on pourrait s'attendre à l'inverse puisque la rigidité effective est moindre. Les forces visqueuses, ou l'amortissement, expliquent ce phénomène. En effet, les forces visqueuses augmentent de façon linéaire avec l'amplitude de déformation, ce qui fait diminuer l'amplitude des pics de résonance. À 15 Hz, on note aussi, malgré la faiblesse de l'amplitude, une modification de la forme du spectre : la contribution des déplacements en  $z$  est réduite. On peut aussi attribuer cette modification à l'augmentation des forces visqueuses.



(a) Spectres simulés à 900 RPM



(b) Spectre obtenu expérimentalement Fillon (2009)

Figure 6.4 Comparaison de l'accélération *in situ* en  $z$  des signaux expérimentaux (600 RPM) et numériques (RPM)

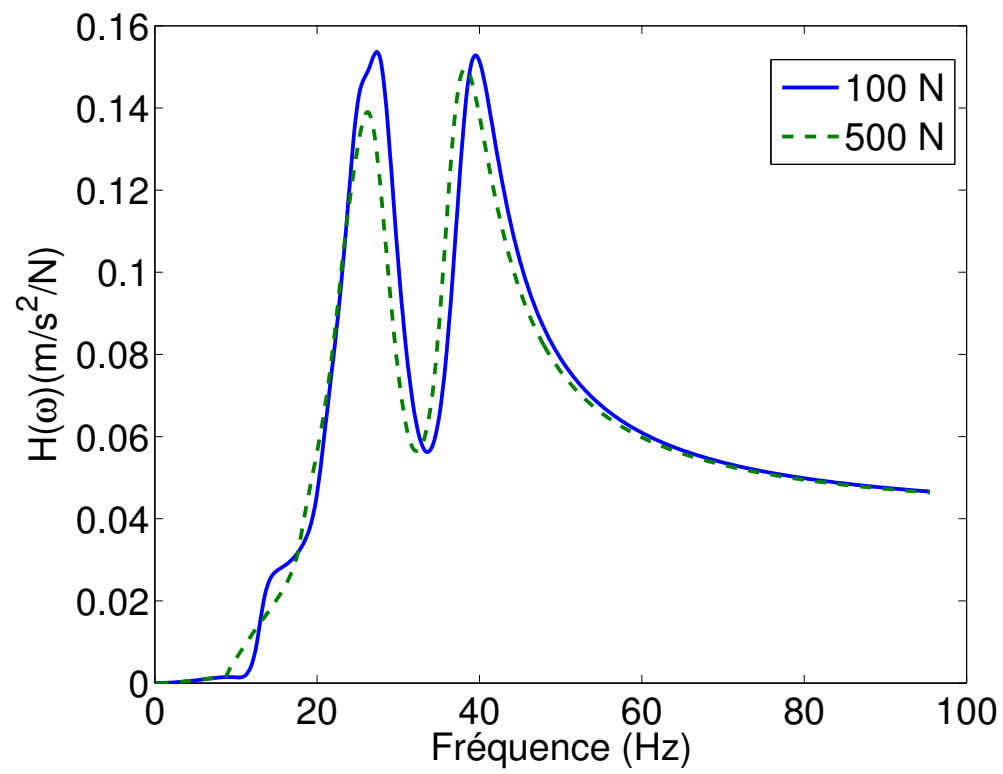


Figure 6.5 Fonction de transfert en z sous l'application, dans toutes les directions et à toutes les fréquences, de forces de différentes amplitudes

### 6.2.6 Détermination des conditions d'utilisation du véhicule

Les spectres de forces obtenus expérimentalement par la méthode améliorée de Lavoie (2009) ne peuvent à eux seuls représenter toute la gamme de régimes moteur lors d'une utilisation normale de véhicule : accélérations, décélérations ou arrêt. Pour remédier à ce problème, un spectre de force représentant le comportement qui serait observé sur un véhicule en opération est construit en se basant sur des équations statistiques et sur les spectres expérimentaux. Quelques faits sur le comportement du moteur nous aident à procéder à cette opération.

1. L'amplitude des forces varie de façon linéaire avec la fréquence.
2. La phase entre les composantes des forces du moteur ne change pas : la séquence de combustion du carburant demeure la même peu importe la vitesse.
3. Tous les pics de forces secondaires sont des harmoniques ou multiples de la fréquence de la fondamentale (force de plus basse fréquence).

Les pics de forces sont construits en utilisant des fonctions de distribution normale : on spécifie l'amplitude, l'écart type de la fréquence et la fréquence moyenne du pic fondamental. Ces paramètres sont déterminés à partir des spectres expérimentaux. Pour chacune des fréquences fondamentales, on positionne les pics secondaires aux multiples de cette fréquence. Par conséquent, la dispersion des pics secondaires est plus grande que celle du pic primaire. La correction de l'amplitude se fait en appliquant une fenêtre : une droite qui augmente avec la fréquence. La pente de cette droite est calculée à partir des résultats expérimentaux disponibles. Ainsi, il est possible de déterminer les conditions d'utilisation tout en conservant toutes les informations sur les pics de force primaire et secondaires obtenues expérimentalement.

Les spectres de forces sont présentés à la figure 6.6.

## 6.3 Algorithme d'optimisation

Le modèle analytique développé peut être utilisé pour réaliser des optimisations sur les paramètres du système. Le nombre de supports, leur position et leur orientation sont des paramètres imposés qui ne peuvent être modifiés par SBI lors du design. Ces paramètres sont fixés par les fabricants des véhicules récréatifs. Parfois, la disposition des supports est déterminée selon des critères autres que l'isolation des vibrations : facilité d'assemblage et coût des éléments de fixation. Néanmoins, SBI est amené à proposer une solution pour per-

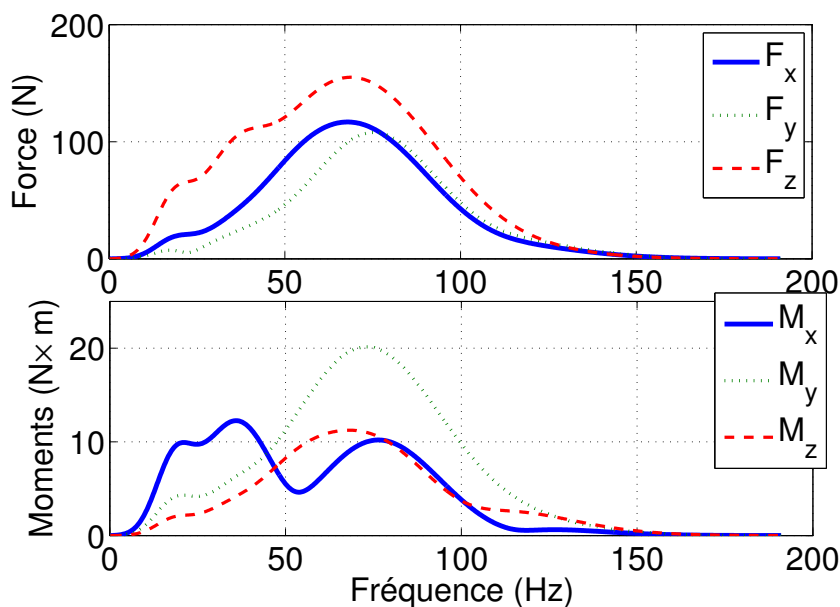


Figure 6.6 Spectres de forces basé sur les résultats expérimentaux et des analyses statistiques

mettre d'obtenir une performance d'isolation acceptable, même si le choix de la disposition des supports n'est pas nécessairement optimale.

Le module d'optimisation développé pour traduire cette réalité ne permet donc que de sélectionner les propriétés souhaitables pour la rigidité du support en tension-compression et en cisaillement.

### 6.3.1 Description de l'algorithme

L'algorithme d'optimisation utilisé dans la plateforme développée est un code maison s'apparentant à un algorithme génétique : l'idée de base de l'algorithme génétique est adaptée spécifiquement pour l'application étudiée (Figure 6.7). Un ensemble de solutions possibles est généré aléatoirement. Les valeurs générées correspondent à la plage de raideurs et de ratios de raideurs qu'il est possible d'obtenir en pratique. La qualité de ces solutions est évaluée par une fonction de coût. Des solutions qui performant le mieux, les paramètres forts sont identifiés : ce sont les paramètres ayant la plus faible dispersion. Une seconde gamme de solutions possibles est générée en utilisant les paramètres forts déterminés à la première itération et ces nouvelles solutions sont évaluées avec la fonction de coût. Finalement, une recherche locale de minimum est faite autour de la meilleure solution issue de la deuxième

génération.

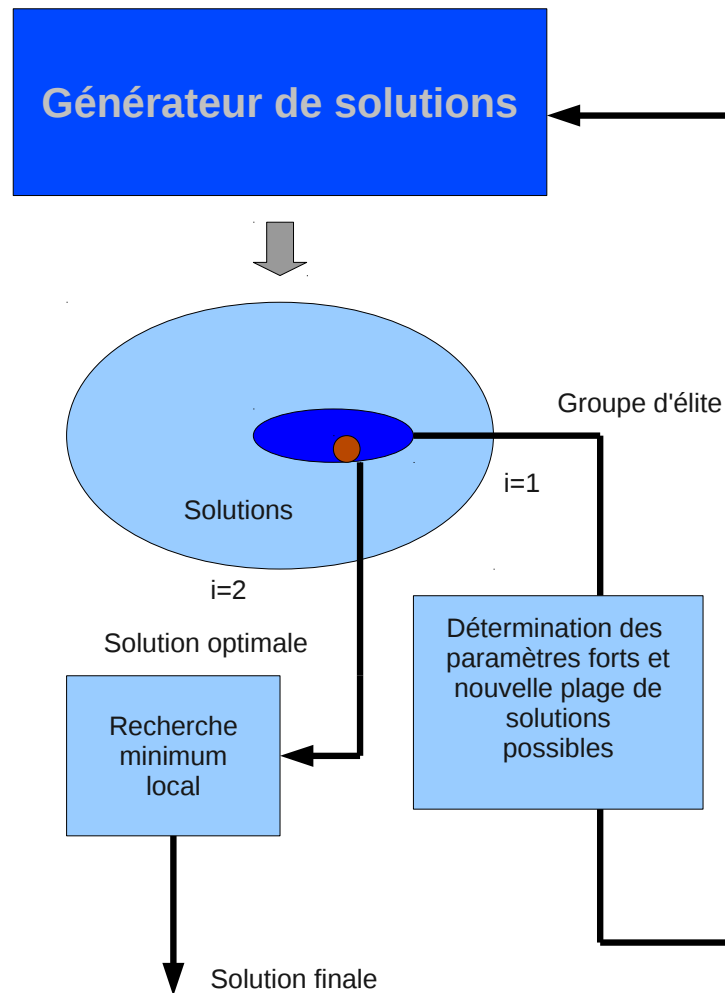


Figure 6.7 Structure de l'algorithme d'optimisation

### Détermination des paramètres de non-linéarité

Le support de moteur caractérisé (c'est-à dire celui du véhicule) sert de référence pour la détermination des paramètres permettant d'exprimer mathématiquement le comportement non-linéaire. Il a d'abord été observé expérimentalement que les termes viscoélastiques et hyperélastiques de l'axe de tension-compression et de cisaillement sont proportionnels à la raideur de l'axe auquel ils sont associés. Cela porte à croire qu'il est possible d'évaluer ap-

proximativement les valeurs des forces hyperélastiques et viscoélastiques à partir des valeurs des raideurs des solutions générées. Dans ce travail, le support caractérisé sert de référence pour déterminer les ratios entre les paramètres non linéaires et les raideurs.

Le ratio de ces paramètres dépend fortement de la géométrie du support de moteur. Il est donc nécessaire d'avoir une bonne idée du type de support qui devra être utilisé puisque ces ratios sont des paramètres d'entrée de l'algorithme.

L'approximation proposée pourrait être validée ou améliorée par une étude de sensibilité sur les valeurs évaluées par une étude par éléments finis.

## 6.4 Optimisations

Différentes fonctions de coût ou d'autres critères peuvent être utilisés dans le module d'optimisation. Le choix de la fonction de coût est primordial à la qualité de l'optimisation. Dans la plateforme conçue, plusieurs options sont disponibles : le choix de ces options dépend de l'objectif de design et possiblement de problèmes rencontrés avec le véhicule. Ces différents critères d'optimisation sont présentés dans cette section.

### 6.4.1 Découplage des mouvements des modes propres

Le découplage des modes permet d'obtenir un système plus stable. Les plus grandes forces générées par le fonctionnement du moteur sont dans l'axe vertical. Si les modes de translation sont fortement couplés avec des modes de rotation, la distribution des forces transmises et donc des déplacements, peuvent différer fortement d'un support à l'autre. Les propriétés mécaniques des supports plus sollicités peuvent s'altérer plus rapidement par fatigue et par vieillissement.

Par inspection des équations matricielles dans le domaine des fréquences, on remarque que les termes non diagonaux sont responsables du couplage entre les mouvements.

$$(-\mathbf{M}\omega^2 + Cj\omega + \mathbf{K})[\mathbf{q}] = \mathbf{F}[u] \quad (6.5)$$

Ce couplage entre les modes est dépendant de la fréquence : dans les équations non-linéaires proposées, tous les termes varient en fréquence de façon différente. L'objectif de l'optimisation est de limiter les termes non-diagonaux de la matrice résultante  $D = (-M\omega^2 + Cj\omega + K)$ . Afin d'éviter que les termes diagonaux diminuent seulement par la diminution



globale de la rigidité, la norme des termes non-diagonaux est divisée par la norme des termes diagonaux. Le système obtenu est donc celui qui possède le plus faible ratio entre les valeurs de rigidité directe et de rigidité des termes de couplage. La fonction de coût proposée est la suivante.

$$f_c = \sum_{\omega=1}^{\omega_{max}} \frac{|nondiag(\mathbf{D}(\omega))|}{|diag(\mathbf{D}(\omega))|} \quad (6.6)$$

Bien qu'il s'agisse d'une méthode modale, il est nécessaire de sélectionner une plage d'analyse pour tenir compte de la rigidification des supports avec la fréquence.

## Résultats

L'algorithme est utilisé pour optimiser le système étudié. Pour démontrer les capacités de l'algorithme, des valeurs différentes pour les supports avant et arrière sont déterminées. Les résultats sont présentés au tableau 6.3, le ratio est le rapport entre la raideur en tension-compression et le cisaillement.

Paramètre	Valeur optimisée
Rigidité avant	430 N/mm
Ratio avant	2.7
Rigidité arrière	480 N/mm
Ratio arrière	2.65

Tableau 6.3 Valeurs obtenues par réduction des termes diagonaux

Les résultats obtenus montrent des rigidités axiales plus faibles que les supports utilisés (750 N/mm) mais une rigidité en cisaillement équivalente (150 N/mm). Afin de vérifier le résultat de cette première optimisation, la réponse verticale (axe  $z$ ) à un couple dans les trois directions est comparée à celle du système de référence, soit les supports actuellement utilisés sur le véhicule. (figure 6.8) La plage identifiée par le carré rouge correspond à la plage des forces appliquées par le moteur en fonctionnement normal.

On remarque tout d'abord que globalement, le système optimisé est plus faiblement couplé que le système de référence dans la plage de forces normalement générées par le moteur. Le couplage entre les mouvements se manifeste lorsqu'une force ou un moment dans un axe génère un autre mouvement. À la figure 6.8, les couples appliqués ( $R_x, R_y, R_z$ ) génèrent un mouvement de translation verticale du centre de masse. Plus le nombre de pics est important, plus il y a de modes possédant des composantes de couplage dans la direction illustrée.

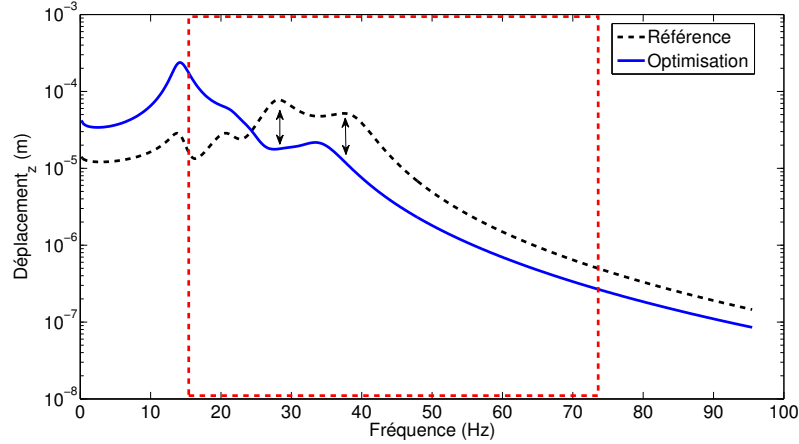


Figure 6.8 Comparaison du système optimisé par découplage des modes au système de référence

L'amplitude de ces pics montre quant à elle l'importance du couplage entre les mouvements. Pour un type de mouvement donné, plus les mouvements sont couplés plus l'amplitude de la réponse sera importante suite à l'application d'une force harmonique dans une autre direction.

À la figure 6.8, on observe des pics à 12, 19, 30 et 38 Hz. Ce sont en effet des modes qui possèdent à la fois des composantes de translation en  $z$  avec au moins une des trois composantes de rotation. On remarque que le nombre de pics, causés par le couplage entre les mouvements, du système optimisé est beaucoup moindre (2 vs 4). De plus, l'amplitude de la réponse est moins importante dans la majorité du spectre ce qui indique que les termes croisés ayant des composantes en  $z$  sont plus faibles. Il y a cependant une zone en basse fréquence pour laquelle le couplage est plus important que pour le système de référence. Toutefois, le critère d'optimisation est conçu pour limiter la sommation du couplage de toute la plage fréquentielle des forces générées par le moteur et c'est effectivement ce que l'on observe. Il serait aussi possible de pondérer les zones du spectre pour cibler des plages de fréquence pour lesquelles on veut obtenir le meilleur découplage.

#### 6.4.2 Méthode de corrélation

Dans certains cas pratiques, il est coutume de concevoir un système d'isolation de sorte que les fréquences naturelles du système ne soient pas dans la plage des excitations auxquels il est assujéti. Dans le cas d'un système de supports de moteur, la plage des forces appliquées est grande et couvre nécessairement la plage des fréquences du système d'isolation à cause des restrictions sur la raideur des supports. Le spectre de forces, permettant

de représenter la gamme complète des forces pouvant être appliquées sur le moteur (figure 6.6), le démontre bien. L'objectif de ce critère est donc de limiter les résonances possibles du système considérant le spectre de forces auquel il est soumis.

Un système entre en résonance si la fréquence de la force appliquée est proche d'une fréquence de résonance du système. De plus, la distribution spatiale de la force d'excitation doit permettre l'apparition de la déformée modale associée à cette fréquence naturelle. Inversement, il est souhaitable que les fréquences naturelles et les formes de modes soient faiblement corrélés avec la force d'excitation.

L'objectif de cette méthode est donc de minimiser les risques que le système entre en résonance. La fonction de coût associée à ce critère est donnée ci-dessous. Dans cette équation,  $u_m$  correspond à la forme du mode et  $f_{n\omega}$  correspond à l'une des composantes principales de la force d'excitation.

$$f_c = \sum_{\omega=0}^{\omega_{max}} \sum_{n=1}^{Nbforces} \sum_{m=1}^{Nbmodes} \frac{|[u_m][f_{n\omega}]^T|}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_n^2)^2 + (2\zeta\omega)^2}} \quad (6.7)$$

Les pics de force primaires et secondaires, selon le régime du moteur peuvent être à différentes fréquences. Pour l'analyse modale, ils sont traités de façon indépendante puisqu'en pratique, ils ne peuvent se retrouver à la même fréquence au même moment : en fonctionnement normal du moteur les pics secondaires correspondent à des harmoniques de la fondamentale.

Les fréquences naturelles et les déformées modales sont déterminées en utilisant le modèle quasi-linéaire présenté précédemment dans ce chapitre.

## Résultats

Ce critère est utilisé pour réaliser une optimisation sur le système étudié dans le cadre de ce mémoire. Les résultats obtenus sont proches de la solution actuellement utilisée sur le véhicule ( $k=750$  N/mm et  $r=5$ ).

Il est plutôt intéressant de voir que la solution déterminée par optimisation est proche de la solution pratique. Les supports de moteur ont été conçus et testés pour rencontrer les attentes du fabricant du véhicule. On peut conclure que la solution trouvée numériquement par cet algorithme a de fortes chances d'être fonctionnelle.

Paramètre	Valeur optimisée
Rigidité avant	811 N/mm
Ratio avant	5
Rigidité arrière	708 N/mm
Ratio arrière	4.3

Tableau 6.4 Valeurs obtenues par la méthode de corrélation

Les déplacements causés par l'application du spectre des forces construit à partir des résultats expérimentaux est illustré à la figure 6.9. La réponse du système optimisé est légèrement inférieure à celle du système pratique.

Étant donné que la solution optimisée répond de façon similaire au spectre de force créé numériquement à partir des résultats expérimentaux et que les valeurs issues de l'optimisation sont similaires aux valeurs du système de départ, il est possible de conclure positivement sur la validité de la méthode. Une solution non-optimale, choisie arbitrairement dans une plage réaliste de solution, a aussi été évaluée. Ce système non-optimisé démontre vraisemblablement un comportement moins performant, particulièrement en début et en fin de spectre.

### 6.4.3 Méthode de corrélation modifiée

En pratique, il est possible de rencontrer des cas pour lesquels certaines fréquences autres que les fréquences de sollicitation du moteur soient sources de problèmes, par exemple la vibration excessive d'une partie de la structure. Pour éviter la résonance de cette partie de la structure problématique, on impose donc des restrictions supplémentaires à la fonction de coût développée précédemment.

$$f_c = \sum_{\omega=0}^{\omega_{max}} \sum_{n=1}^{Nbforces} \sum_{m=1}^{Nbmodes} \frac{|[u_m][f_{n\omega}]^T|}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_n^2)^2 + (2\zeta\omega)^2}} + \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_{prob}^2)^2 + (2\zeta\omega)^2}} \quad (6.8)$$

En principe, on tend à éloigner les fréquences naturelles du système de la fréquence naturelle posant des problèmes.

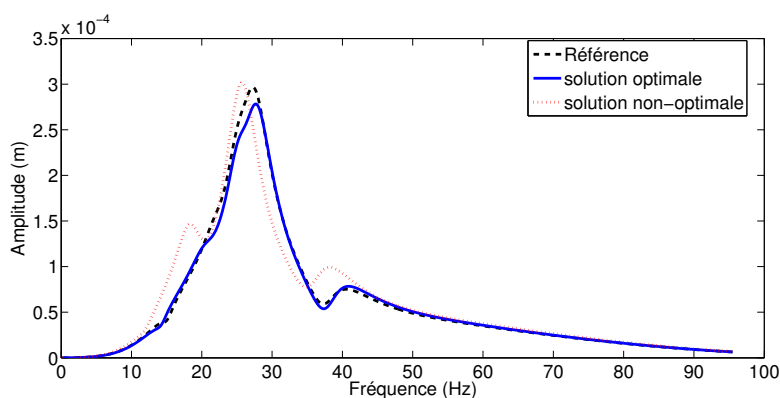


Figure 6.9 Comparaison des réponses du système optimisé au système de référence et à un système non-optimisé

## Résultats

En supposant, à titre d'exemple, que le système ne doit pas contenir de modes propres à 20 Hz, tout en limitant la corrélation entre les modes propres et les forces appliquées, les résultats obtenus sont les suivants.

Paramètre	Valeur optimisée
Rigidité avant	828 N/mm
Ratio avant	4
Rigidité arrière	627 N/mm
Ratio arrière	4.3

Tableau 6.5 Valeurs obtenues par la méthode de corrélation modifiée

Les modes propres associés à ces valeurs sont calculés à partir des valeurs propres du modèle quasi-linéaire. (Tableau 6.6)

La figure 6.10 présente la réponse en  $x$  en appliquant une force dans toutes les directions et un moment autour de tous les axes.. On y observe une plage de 6 Hz autour de la fréquence dite problématique. De plus, l'amplitude des autres composantes spectrales demeure dans une plage de valeurs acceptables. Ces fréquences sont dans la même plage que le système de référence qui par contre possède une fréquence naturelle très près de 20Hz.

Finalement, la performance globale du système optimisé est observée lorsque le spectre de force expérimental est appliqué au système. (Figure 6.11)

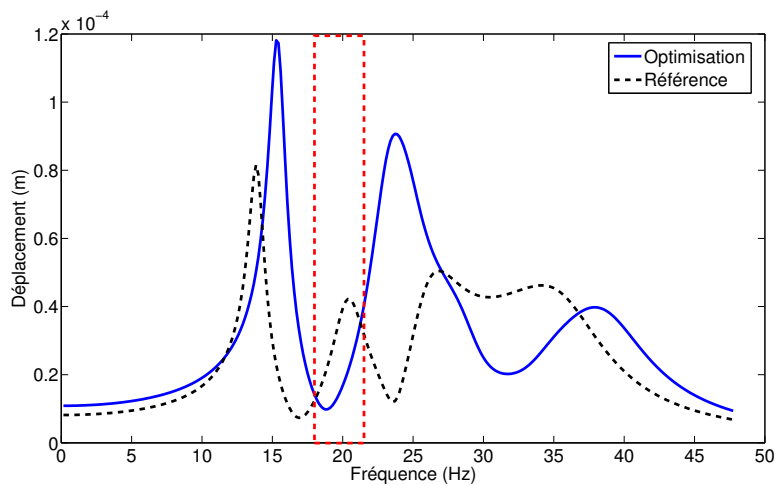


Figure 6.10 Comparaison des fonctions de transfert du système optimisé par la méthode de corrélation modifiée et du système de référence obtenue en appliquant une force de 100N et un couple de 10N à toutes les fréquences (0-100 Hz) et dans toutes les directions

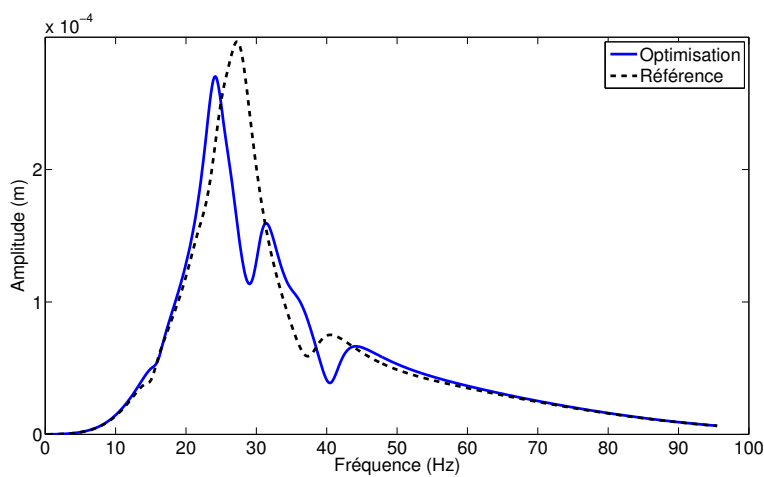


Figure 6.11 Comparaison de la réponse au spectre de force du système optimisé par la méthode de corrélation et du système de référence

	Optimisation	Référence
Mode	F(Hz)	F(Hz)
1	15.4	12
2	23.2	19
3	25	22
4	28.9	26
5	33.7	30
6	38.6	38

Tableau 6.6 Fréquences naturelles du système optimisé

La réponse du système optimisé est acceptable bien qu'elle diffère quelque peu de la réponse du système de référence. Le système optimisé est en effet nettement plus performant dans certaines plages mais un peu moins performant dans d'autres plages. Cependant, la performance à la fréquence critique est similaire au système de référence qui possède une fréquence naturelle près de 20 Hz. Le déplacement et par conséquent la force transmise à cette fréquence demeurent faibles.

On remarque à la figure 6.10 que les fréquences propres autour de la fréquence problématique sont d'assez grande amplitude, ce qui peut expliquer en partie le fait que le système de référence n'amène pas une amélioration notable à cette fréquence. De plus, le système de référence performe bien sous l'application du spectre : le mode présent à 20 Hz est probablement faiblement corrélé au spectre de force dans cette plage. La réponse du système non-optimisé (figure 6.9) est plus élevée dans cette plage de fréquences ce qui montre, encore une fois, l'importance de l'optimisation.

La comparaison de ces trois spectres permet de conclure qu'effectivement la corrélation entre la forme des modes et les forces appliquées a un effet considérable sur la réponse du système. Malgré le fait que le système de référence possède une fréquence naturelle dans la plage problématique, la réponse demeure tout de même très acceptable.

#### 6.4.4 Étude de sensibilité

Les valeurs déterminées par optimisation sont des valeurs exactes, en pratique il peut être difficile d'atteindre les valeurs cibles avec précision, étant donné les incertitudes dans le procédé de fabrication. Une étude de sensibilité est réalisée afin de constater la variabilité des

performances des solutions calculées en raison non seulement des impondérables de la mise en forme, mais aussi du vieillissement de la pièce. Cette étude permet d'évaluer la sensibilité de la fonction de coût par rapport aux variations de la raideur en tension-compression et du ratio de raideur. Une optimisation avec une génération de solutions contrôlée est réalisée, puis l'évaluation de la fonction de coût est tracée en fonction des paramètres de sortie de l'algorithme. Les zones de bleu sont les solutions performantes alors que les zones vertes sont les zones moins performantes. Une optimisation à un seul paramètre a été réalisée en utilisant le critère de corrélation. À la figure 6.12, cette solution est encerclée et la solution de référence est marquée par une croix.

On remarque que l'algorithme a convergé vers une solution autour de laquelle les solutions adjacentes sont aussi performantes. Il existe des solutions adéquates dans d'autres plages, certaines plus performantes particulièrement pour les supports moins rigides. Cependant, la surface de ces zones est faible et il peut être risqué de viser ces valeurs en fabrication. Par exemple, la solution de référence, se trouve très près d'une zone de moins bonne performance. C'est donc dire que les écarts dans la production ou le vieillissement du caoutchouc risquent de mener à une perte de performance.

## 6.5 Conclusion de ce chapitre

Le modèle constitué permet de représenter le comportement dynamique du moteur sur ses supports en considérant les non-linéarités du support. En plus des fonctions de caractérisation présentées dans le chapitre 4, le modèle permet de modéliser l'effet de forces à multiples fréquences. L'ambiguïté de la résonance est résolue en déterminant les valeurs moyennes de rigidité possible dans la plage de résonance.

Le modèle développé est ensuite utilisé pour réaliser des optimisations selon les critères d'intérêt de Soucy Baron Inc. L'algorithme d'optimisation permet d'obtenir rapidement des valeurs cibles de raideur. L'algorithme est conçu pour converger vers des plages de valeurs autour desquelles toutes les solutions sont acceptables. Les solutions optimisées ont des valeurs de sortie et un comportement très proche du support actuellement utilisé sur le véhicule. Ce système de support est éprouvé expérimentalement et a des performances jugées acceptables. Par conséquent, on peut conclure positivement sur la qualité de la méthode proposée dans le mémoire.



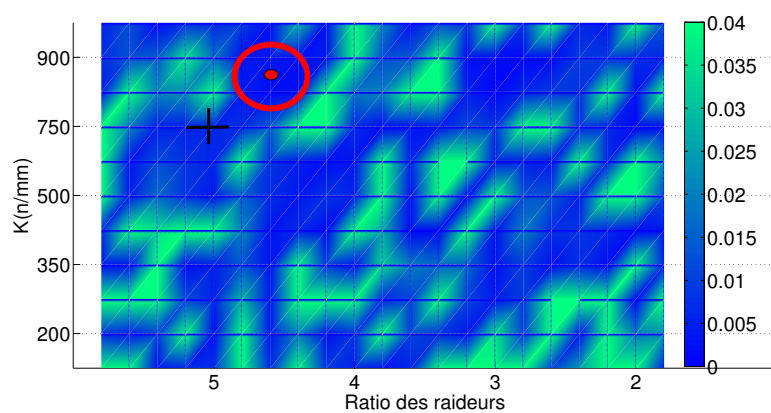


Figure 6.12 Résultat de l'optimisation (valeur de la fonction de coût) en fonction de la raideur et de l'inverse du ratio de raideur

## CHAPITRE 7

### Discussion

Le processus de conception, décrit et évalué dans les chapitres précédent, fournit des résultats très près de ce qui a été observé expérimentalement. Le modèle permet de bien évaluer les fréquences naturelles et les mouvements principaux associés aux déformées modales du système. Cependant, quelques questionnements sont soulevés à la lumière des résultats expérimentaux et des modélisations.

#### 7.1 Caractérisation du caoutchouc

Les fonctions utilisées pour représenter le comportement viscoélastique de la pièce ne correspondent pas toutes à un modèle connu du comportement du caoutchouc. La représentation du comportement viscoélastique s'apparente fortement à une série de Prony, qui utilise une série de nombres complexes. Les résultats obtenus expérimentalement ont une bien meilleure corrélation avec les fonctions de régression utilisées qu'avec la forme complexe des séries de Prony. En fait, les séries de Prony sont utilisées pour caractériser les matériaux et représenter leur comportement. Elles sont utilisées dans les modèles par éléments finis ou dans le cas de pièces simples, faiblement déformées comme dans les traitements de surfaces de type PCLD (*Partial Constrained Layed Damping*). Dans ces conditions, les effets de la géométrie sont simples et bien connus, ce qui n'est pas le cas des supports de moteur.

Les formes de courbes issues de la caractérisation s'appliquent à un seul type de support de moteur : le type cylindrique a été étudié dans ce mémoire. Il se peut cependant, que les fonctions choisies permettent de représenter le comportement d'autres types de supports. L'utilisation de l'algorithme de calcul nécessitera néanmoins un effort de caractérisation dynamique pour chaque type de pièce rencontré afin d'en déterminer les tendances de comportement non-linéaire.

La caractérisation de la raideur en fonction de l'angle a mis en lumière une certaine divergence avec la relation mathématique normalement utilisée. À la lumière de ces résultats, des travaux par éléments finis ont été initiés afin de déterminer l'effet de la combinaison des contraintes de cisaillement et des contraintes de tension-compression. De plus, un nouvel outillage permettant d'expérimenter différents angles de sollicitation est en phase de concep-

tion. Il est proposé de modifier la forme de la représentation matricielle de la rigidité dans les axes globaux du support de moteur de la façon suivante.

$$K = \begin{bmatrix} k_a & 0 & k_{ar} \\ 0 & k_a & k_{ar} \\ k_{ar} & k_{ar} & k_r \end{bmatrix} \quad (7.1)$$

De cette façon, il serait facile d'inclure l'effet combinatoire des contraintes orthogonales.

## 7.2 Fonctions de transfert expérimentales

Les fonctions de transfert déterminées expérimentalement permettent d'obtenir les fréquences naturelles et les mouvements principaux du moteur. Cependant, l'amplitude des spectres obtenus est erronée, en partie à cause de la mauvaise calibration du marteau instrumenté.

Il est difficile d'appliquer des impacts de qualité à répétition. Lors de l'acquisition une centaine d'impacts sont appliqués, dont certains de différentes durées et de différentes amplitudes. Les résultats comportent donc tous les signaux d'impact et la réponse associée. Il est fort probable que dans le lot des impacts utilisés pour le moyennage, certains soient de moins bonne qualité : double impact, durée trop longue ou amplitude différente des autres. La difficulté de reproduire les impacts a mené au choix des paramètres d'acquisition qui ne permettent pas d'obtenir une résolution fréquentielle adéquate pour ce genre de mesures.

La faible résolution en fréquence obtenue est une source possible de plusieurs erreurs dans l'interprétation des résultats. Lors de la reconstruction des mouvements du moteur à partir des signaux mesurés, la précision de la phase est un élément primordial. Autour d'une résonance, la phase varie de 0 à  $\pi$  dans une plage de 1 ou 2 Hz. Si la variation de phase est mal détectée, les mouvements de rotation et de translation peuvent se confondre. L'ajout d'un accéléromètre directement sur le moteur pourrait permettre d'obtenir de meilleurs résultats.

Pour être raffinée, la technique devrait permettre d'appliquer les impacts un à un puis d'accepter ou de rejeter le résultat en fonction de la qualité des signaux mesurés. De cette façon, il serait possible d'utiliser des paramètres d'acquisition permettant d'obtenir une meilleure résolution en fréquence ce qui permettrait de mieux identifier la proportion des mouvements et de séparer efficacement les composantes de rotation et de translation.

### 7.3 Validation du modèle

Les fréquences naturelles et les déformées modales identifiées par le modèle ont une très bonne corrélation avec les fréquences naturelles et les mouvements principaux identifiés expérimentalement. Si l'on considère les possibles erreurs commises dans l'étude expérimentale, l'amplitude des différents pics identifiés numériquement ne peut faire l'objet d'une validation. Il est en effet difficile d'obtenir expérimentalement les fonctions de transfert d'une structure complexe non-linéaire. Dans la littérature, les modèles sont validés par l'observation des fréquences naturelles et des déformées modales. Il n'est jamais possible de comparer directement les spectres expérimentaux aux spectres numériques.

Étant donné que le modèle évalue adéquatement les fréquences naturelles  $\sqrt{\frac{K}{M}}$  et que la masse du moteur est un paramètre d'entrée, tout porte à croire que l'amplitude de la réponse est bien modélisée. De plus, une seconde validation à partir de résultats disponibles dans la littérature montre que l'évaluation de l'amplitude de la réponse se fait bien. Puisqu'il n'est pas possible de comparer directement les spectres expérimentaux et numériques, le modèle devra être utilisé avec prudence lors de la première phase de déploiement. Une seconde validation pourrait être considérée, si le montage expérimental est à nouveau disponible.

### 7.4 Validation de la méthode d'optimisation

Les résultats obtenus par les méthodes d'optimisations sont aussi cohérents. La solution actuellement utilisée sur le véhicule performe bien dans la réalité. Cette performance est aussi traduite par les fonctions d'optimisations. Il s'agit du seul point de validation qualitatif disponible. Comme pour le modèle, des validations supplémentaires seront nécessaires avant ou pendant le déploiement de la méthode de design proposée.

## CHAPITRE 8

### CONCLUSION

#### 8.1 Synthèse des travaux

L'objectif de ce projet était de concevoir un module numérique d'optimisation basé sur des équations analytiques. Le comportement non-linéaire du caoutchouc a été caractérisé expérimentalement pour une vaste gamme de conditions correspondant à la plage d'utilisation *in situ* des supports de moteur sur le véhicule. Les courbes de caractérisation démontrent un comportement non-linéaire significatif : des variations de 30% de la rigidité et de 90% pour l'amortissement sont observées selon la fréquence et l'amplitude de la sollicitation. Les courbes de caractérisation sont utilisées dans un modèle analytique du comportement dynamique du moteur. Le modèle permet de bien prédire les fréquences naturelles et les déformées modales. Tel qu'il était anticipé, les fréquences naturelles et l'amplitude des réponses obtenues grâce au modèle non-linéaire et au modèle linéaire sont différentes. On remarque aussi que le couplage entre les modes n'est pas tout à fait le même. Des optimisations sur les paramètres d'intérêt sont réalisées. Les résultats des optimisations sur la valeur nominale des raideurs des supports se rapprochent des valeurs actuellement utilisées dans le véhicule. L'outil d'optimisation permet donc d'obtenir rapidement des valeurs de raideur cible, ce qui facilite le processus de design des supports de moteurs tout en limitant le nombre de prototypes nécessaires.

#### 8.2 Limitations de la solution proposée

L'approche de caractérisation employée permet de bien représenter le comportement du support étudié. Cependant, les courbes obtenues ne permettent pas de représenter le comportement de supports de topologies différentes, à moins de faire des approximations. L'hypothèse que les propriétés non-linéaires des supports soient proportionnelles à la raideur nominale est donc utilisée. La formulation de cette hypothèse permet d'utiliser les tendances observées lors de la caractérisation du caoutchouc pour faire les optimisations. Les solutions optimisées auront en effet un comportement similaire au support caractérisé expérimentalement. Cette hypothèse est valide pour des supports de même forme et ayant des dimensions du même ordre de grandeur que le support caractérisé. Pour d'autres cas, de nouvelles séries de caractérisations doivent être menées.

La caractérisation a été faite dans une plage finie d'amplitudes et de fréquences. Les termes de viscoélasticité tendent à devenir constants et peuvent être utilisés pour une plus grande plage de fréquence. Cependant, les termes de non-linéarité hyperélastiques sont fiables dans une plage allant jusqu'à 30% de déformations (3mm), après quoi le support tend à se rigidifier à nouveau. Ce phénomène n'est pas modélisé : les déformations maximales sont d'environ 1 mm dans le modèle et dans la réalité.

Finalement, malgré les résultats cohérents obtenus, il sera nécessaire d'obtenir des validations expérimentales supplémentaires avant de pouvoir utiliser la méthode avec assurance.

### 8.3 Améliorations futures

Étant donné que la méthode de caractérisation proposée ne permet d'obtenir les propriétés que pour une seule géométrie, il serait intéressant de réaliser une étude de sensibilité des termes de non-linéarité en fonction des dimensions du support. Cette étude pourrait être faite en utilisant un logiciel de calculs par éléments finis. Il serait possible de déterminer les tendances des différents paramètres issus de la caractérisation en fonction du mélange de caoutchouc et de la forme. De cette façon, il ne serait plus nécessaire de caractériser expérimentalement les supports de référence.

Le châssis n'a pas été inclus dans le modèle présenté. L'ajout du comportement du châssis permettrait de mieux modéliser les phénomènes dynamiques en jeu. Le châssis pourrait être modélisé par une plaque dont les dimensions sont choisies de telle sorte que les fréquences naturelles et les modes propres soient similaires à ceux observés expérimentalement. L'ajout du châssis permettrait entre autres d'utiliser de nouvelles fonctions de coût d'optimisation ayant pour objectif de limiter l'énergie transmise au châssis et ressentie par les utilisateurs. Dans la formulation actuelle du modèle, il n'est pas possible de calculer l'énergie transmise puisque l'impédance de la structure n'est pas connue ou modélisée.

Finalement des fonctions d'optimisation à plusieurs critères pourraient être formulées. Ces nouvelles formulations s'intégreraient facilement dans la structure de l'algorithme d'optimisation. Une brève étude de sensibilité a été présentée dans le mémoire. Il serait intéressant de reprendre ce genre d'étude avec d'autres méthodes proposées dans la littérature. En effet, la plupart des procédés d'optimisation ne comportent pas de telle étude. Pourtant, dans le

contexte réel de la fabrication ,ces pièces nécessitent une attention particulière concernant la plage de convergence et de la robustesse de la solution choisie.

## Références

- ALMEIDA, R., URGUEIRA, A. et MAIA, N. (2007). Identification of rigid body properties from vibration measurements. *Journal of Sound and Vibration*, 299, 884 – 899.
- ASHRAFIUON, H. (1993). Design optimization of aircraft engine-mount systems. *Journal of Vibration and Acoustics*, 115, 463–467.
- CHO, M.-S. et KIM, K.-J. (2002). Indirect input identification in multi-source environments by principal component analysis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 16, 873 – 883.
- COURTEILLE, E., LÉOTOING, L., MORTIER, F. et RAGNEAU, E. (2005). New analytical method to evaluate the powerplant and chassis coupling in the improvement vehicle nvh. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 24, 929 – 943.
- FILLON, A. (2009). *Techniques de traitement de signal dans l'étude du comportement dynamique de tampons d'ancrage*. Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal.
- IBRAHIM, R. (2008). Recent advances in nonlinear passive vibration isolators. *Journal of Sound and Vibration*, 314, 371 – 452.
- JEONG, T. et SINGH, R. (2000). Analytical methods of decoupling the automotive engine torque roll axis. *Journal of Sound and Vibration*, 234, 85 – 114.
- JEONG, T. et SINGH, R. (2001). Inclusion of measured frequency- and amplitude-dependent mount properties in vehicle or machinery models. *Journal of Sound and Vibration*, 245, 385 – 415.
- KAUL, S. et DHINGRA, A. (2005). Two approaches for optimum design of motorcycle engine mount. *Engineering Optimization*, 37, 307–324.
- KIM, G. et SINGH, R. (1995). A study of passive and adaptive hydraulic engine mount systems with emphasis on non-linear characteristics. *Journal of Sound and Vibration*, 179, 427 – 453.
- LAVOIE, M. (2009). *Caractérisation et modélisation d'un véhicule tout terrain et de ses supports faits en élastomères*. Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal.
- LI, W. L. et LAVRICH, P. (1999). Prediction of power flows through machine vibration isolators. *Journal of Sound and Vibration*, 224, 757 – 774.
- LIU, Y., SHEPARD, W. S. et JR. (2005). Dynamic force identification based on enhanced least squares and total least-squares schemes in the frequency domain. *Journal of Sound and Vibration*, 282, 37 – 60.



- PAN, J., PAN, J. et HANSEN, C. H. (1992). Total power flow from a vibrating rigid body to a thin panel through multiple elastic mounts. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 92, 895–907.
- PARK, J.-Y. et SINGH, R. (2008). Effect of non-proportional damping on the torque roll axis decoupling of an engine mounting system. *Journal of Sound and Vibration*, 313, 841 – 857.
- PARK, J.-Y. et SINGH, R. (2010). Role of spectrally varying mount properties in influencing coupling between powertrain motions under torque excitation. *Journal of Sound and Vibration*, 329, 2895 – 2914.
- REESE, S. et GOVINDJEE, S. (1997). Theoretical and numerical aspects in the thermo-viscoelastic material behaviour of rubber-like polymers. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 1, 357–396. 10.1023/A :1009795431265.
- SCHEDLINSKI, C. et LINK, M. (2001). A survey of current inertia parameter identification methods. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 15, 189 – 211.
- SJÖBERG, M. (2002). *On dynamic properties of rubber isolators*. Thèse de doctorat, École Technique de Stockholm.
- SJÖBERG, M. et KARI, L. (2003). Nonlinear isolator dynamics at finite deformations : An effective hyperelastic, fractional derivative, generalized friction model. *Nonlinear Dynamics*, 33, 323–336. 10.1023/A :1026037703124.
- TABADDOR, F. (1987). Rubber elasticity models for finite element analysis. *Computers Structures*, 26, 33 – 40.
- THAIJAROEN, W. et HARRISON, A. (2010). Nonlinear dynamic modelling of rubber isolators using six parameters based on parabolic spring, springpot, and smooth-slip friction element. *Polymer Testing*, 29, 857 – 865.
- TORVIK, P. J. et BAGLEY, R. L. (1984). On the appearance of the fractional derivative in the behavior of real materials. *Journal of Applied Mechanics*, 51, 294–298.
- WU, J.-D. et LIECHTI, K. M. (2000). Multiaxial and time dependent behavior of a filled rubber. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 4, 293–331. 10.1023/A :1026575808632.

## ANNEXE A

### Description détaillée des tâches

Certains des éléments présentés dans ce mémoire sont issus du travail de d'autres étudiants. Afin de bien saisir la nature du projet dans son ensemble les principales activités du projet et la contribution des collaborateurs est décrite. L'ordre des collaborateurs est lié au niveau de contribution de chacun.

#### Mesures des forces générées par le moteur

- Développer la méthode expérimentale (ML<sup>1</sup>)
- Mesurer (ML JCL<sup>2</sup> AF<sup>3</sup>)
- Traitement des données (AF, ML, JCL)

#### Caractériser les supports du moteur

- Mesurer (JCL et AEM<sup>4</sup>)
- Mathématiser les courbes expérimentales (JCL et AEM)
- Corréler les paramètres de caractérisation du support avec les dimensions du support par FEA (à venir)

#### Mesurer les fonctions de transfert

- Développer la méthode de mesure (JCL)
- Mesurer (JCL et ML)
- Analyser les résultats (JCL)

#### Modéliser le système dynamique

- Programmer le modèle (JCL)
- Analyser et valider (JCL)
- Optimiser (JCL)

---

1. Martine Lavoie M.Sc.A.  
2. Joel Chamberand-Lauzon  
3. Amaury Fillon M.Ing.  
4. Amine El Mourid B.Ing.

## ANNEXE B

## Fonctions de transferts expérimentales et simulées

Pour des raisons de concision, les fonctions de transfert simulées ainsi que certaines fonctions de transfert déterminées expérimentalement dans les repères locaux des supports n'ont pas été présentées. Les autres sont présentées dans cette annexe.

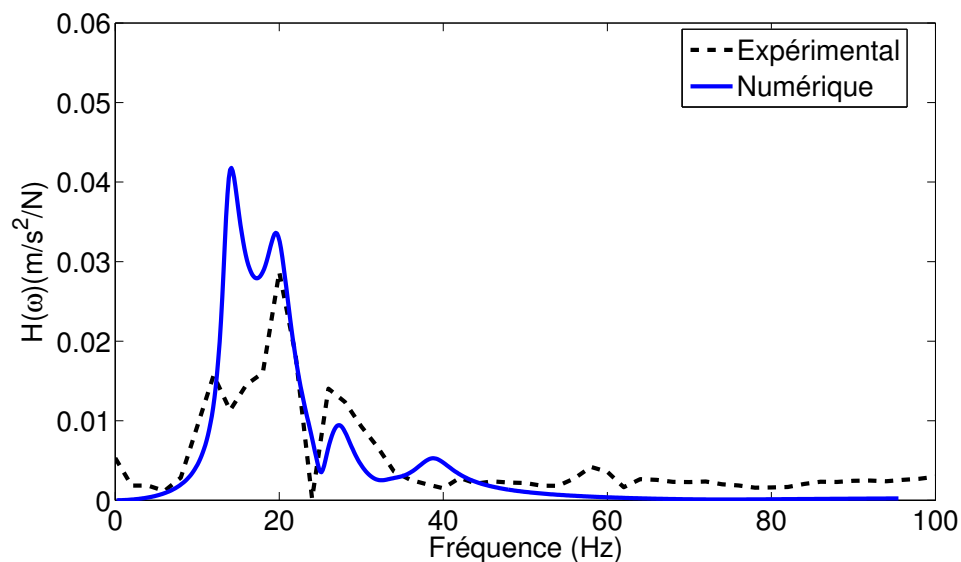


Figure B.1 Comparaison de la fonction de transfert de l'axe x expérimentale et simulé du support arrière droit

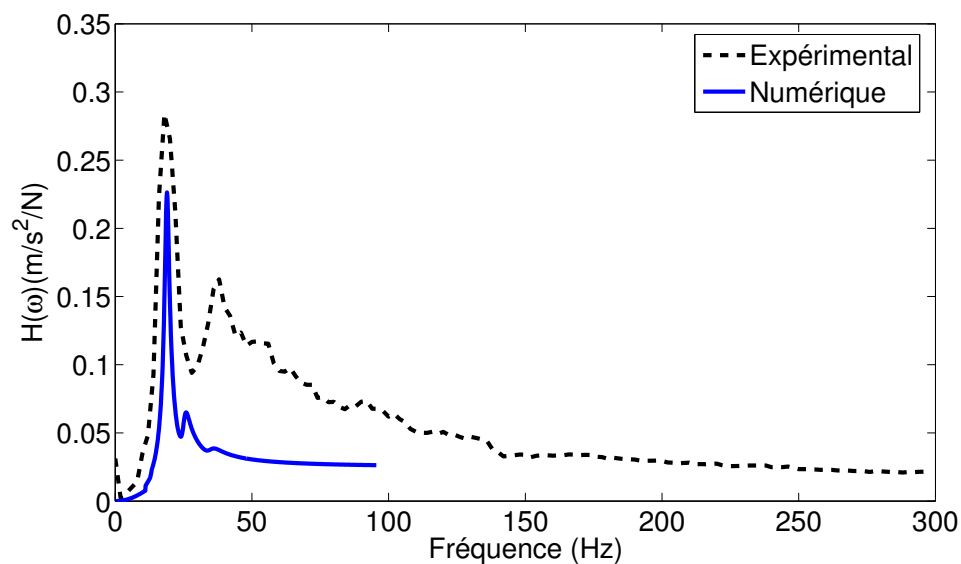


Figure B.2 Comparaison de la fonction de transfert de l'axe y expérimentale et simulé du support arrière droit

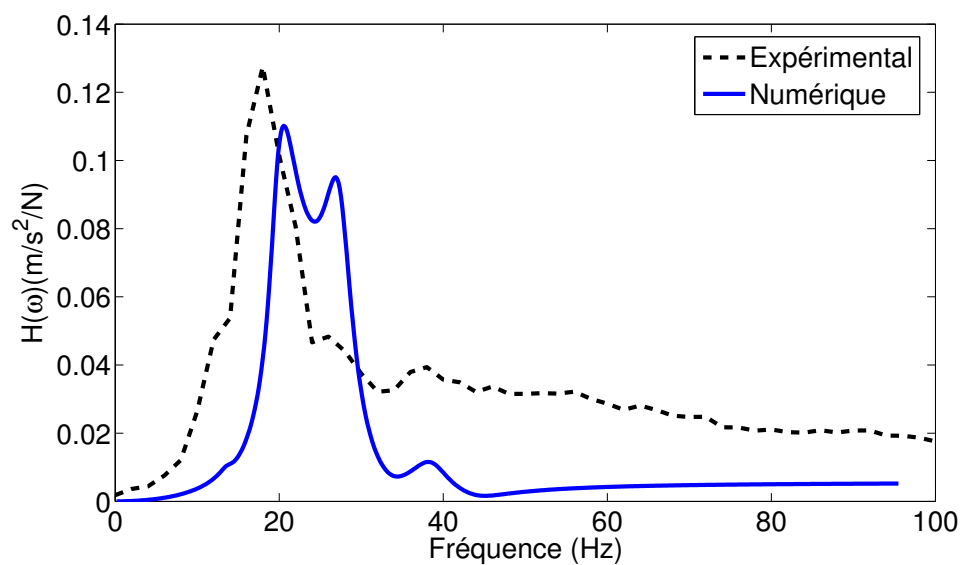


Figure B.3 Comparaison de la fonction de transfert expérimentale de l'axe z et simulé du support arrière droit

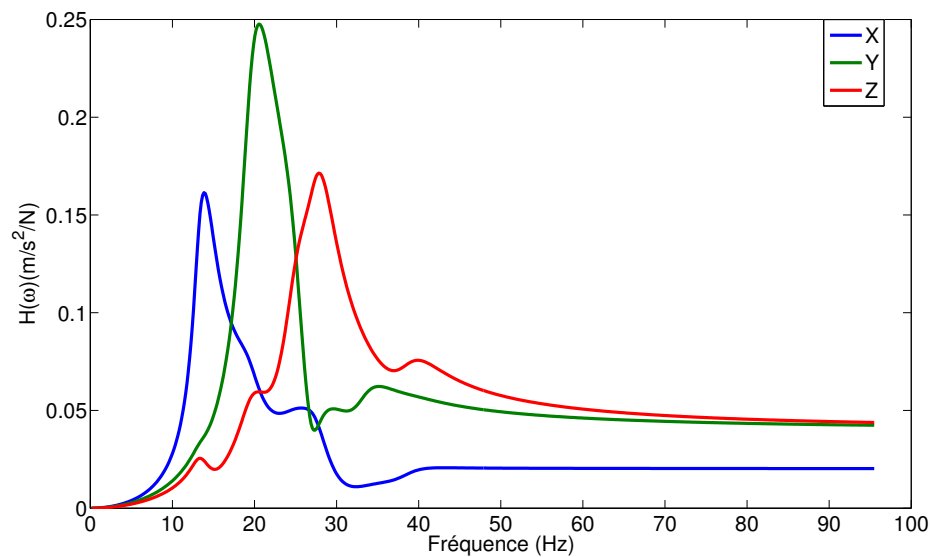


Figure B.4 Fonctions de transfert des déplacements dans le système d'axe global du moteur obtenus en appliquant une force de 200N et un moment de 20N dans toutes les directions

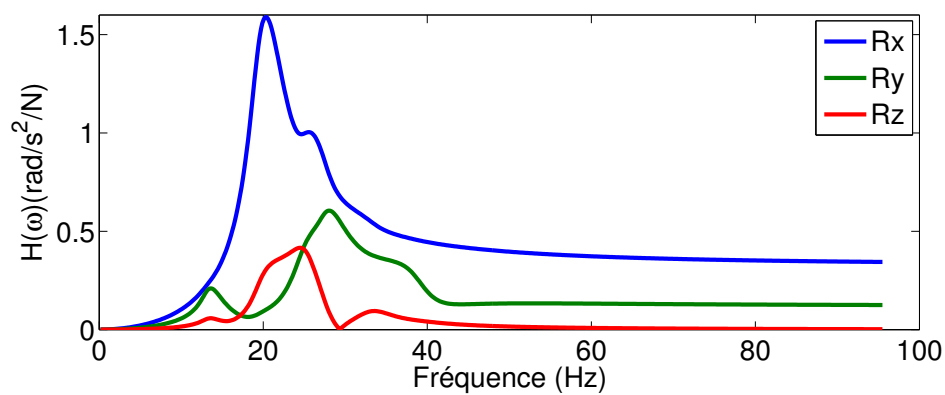


Figure B.5 Fonctions de transfert des rotations dans le système d'axe global du moteur obtenus en appliquant une force de 200N et un moment de 20N dans toutes les directions

## ANNEXE C

### Comparaisons des simulations avec celles de Jeong et Singh (2000)

Cette annexe présente les autres courbes obtenues en comparaison avec les simulation de l'article de référence.

Les paramètres utilisés sont les suivants.

masse	70 Kg
$k_p$	840N/mm
$k_a$	336N/mm
$c$	inconnu
orientation	30 degrés (Ry)

Tableau C.1 Données de masse et de rigidité du modèle de comparaison

No du support	Position (mm) ( $r_x, r_y, r_z$ )
1	(251,-173,-62.7)
2	(251, 182, -71)
3	(-251, -146, -78.3)
4	(-251, 144, -93)

Tableau C.2 Position des supports du modèle de comparaison

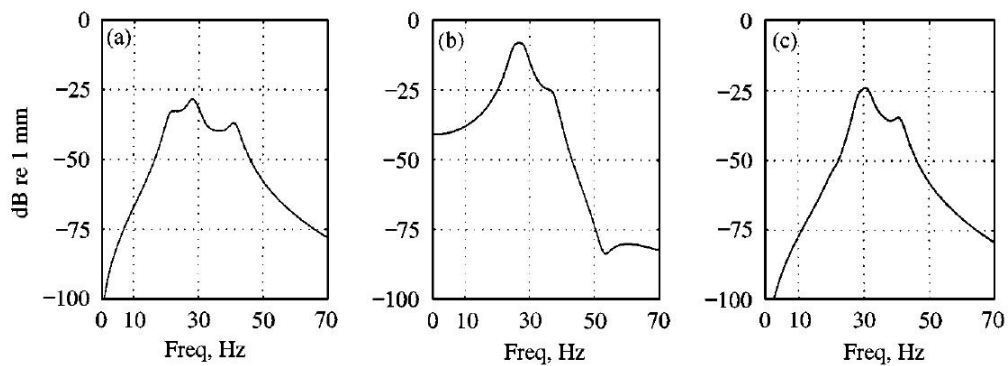


Figure C.1 Fonctions de transfert de déplacements obtenues par Jeong et Singh (2000) a) x, b) y c) z

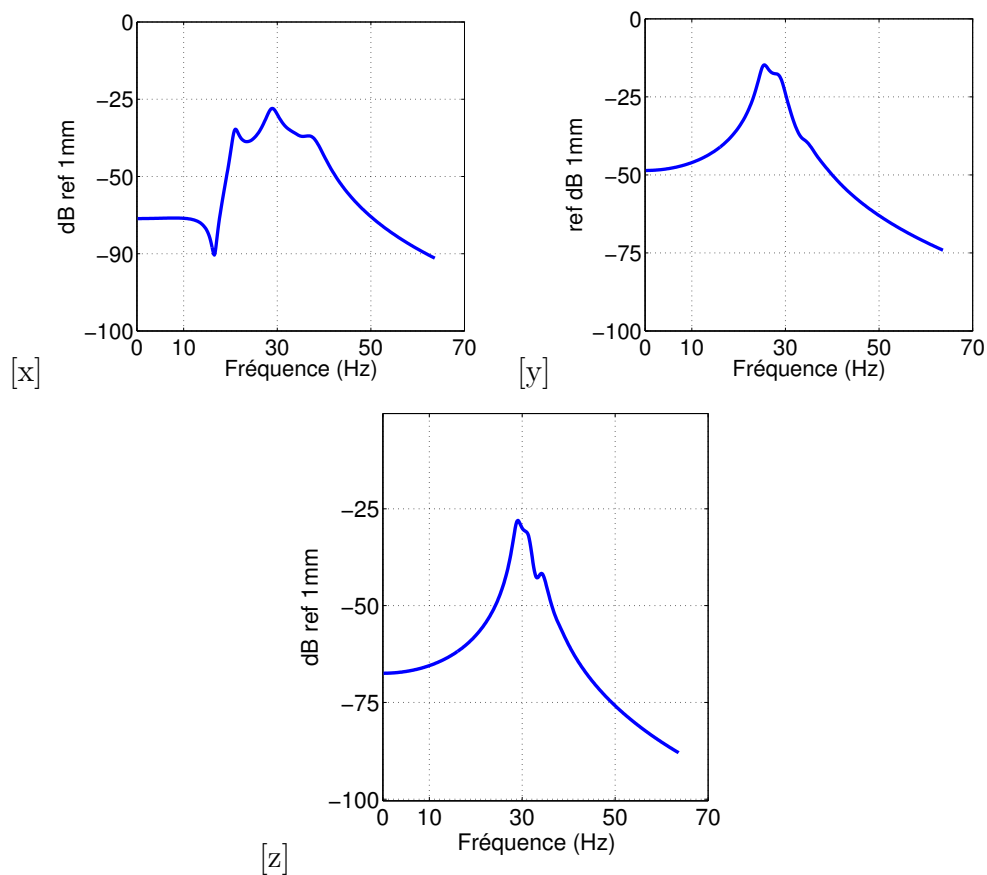


Figure C.2 Fonctions de transfert des déplacements obtenus par les simulations de ce mémoire

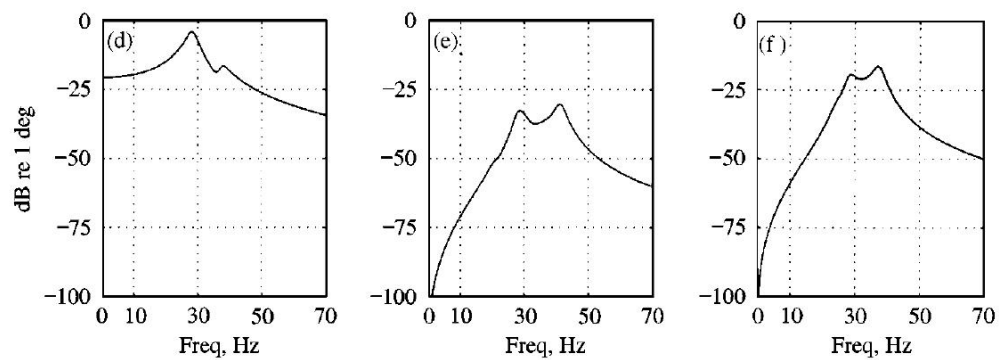


Figure C.3 Fonctions de transfert des rotations obtenues par Jeong et Singh (2000) d)  $\theta$ , e)  $\phi$  f)  $\alpha$

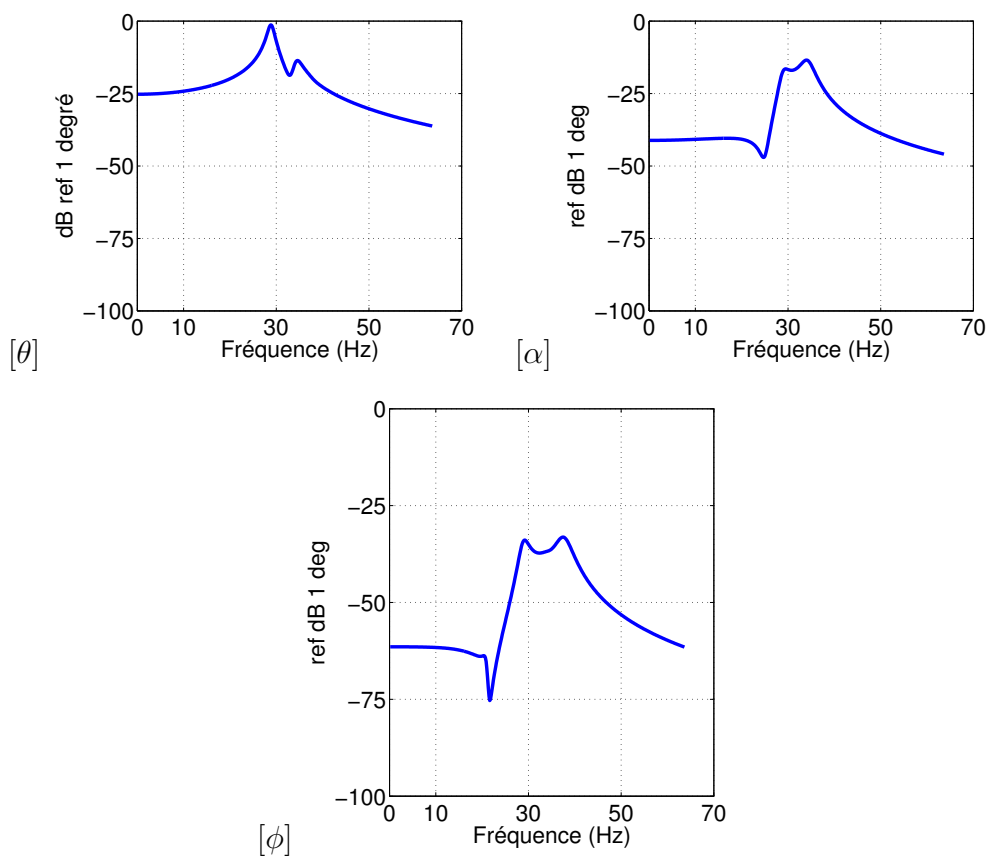


Figure C.4 Fonctions de transfert de rotations obtenues par les simulations de ce mémoire



## ANNEXE D

## Scripts et codes utilisés

```

%-----%
%Nom du script : const_mat.m
%Description : Code permettant de calculer la réponse à un input
%               de force
%Auteur : Joel C.-Lauzon
%Date: mai 2010
%-----%
format long e

clear all
rep_trans=1;
if rep_trans==0
    load('Forces_Moments');
end

%initialisation du compteur des fn
compte=1;

%% Initialisation de la matrice d'inertie
I=[3.8 .07 -.036; .07 1.9 .081; -.036 .081 3];
%matrice d'inertie
M_x=zeros(3,3);Mp=62*eye(3);

M=[Mp M_x;M_x I];
%% initialisation des déplacements

depl(:,:)=zeros(4,3); % déplacement(f)
depl2(:,:)=zeros(4,3); % densité spectrale
force=[5 100 -100 30 10 10];
%% Boucle itérative de calcul

```

```

for d=1:2 % 2 balayages en fréquence
for i=1:600 % à toute les fréquence
for r=1:4 % itération de convergence

%%support A
depl=(depl2+depl)*1000;

kf=([1.5e5 0 0; 0 1.5e5 0; 0 0 7.5e5]+...
[5.6 0 0; 0 5.6 0; 0 0 47.5]*...
(1000*log(i/2/pi)));
c=[2678*(i/2/pi)^-.82 0 0; 0 2678*(i/2/pi)^-.82 0; 0 0 11864*...
(i/2/pi)^-.86]*.8;
k=kf-[2.7e4 0 0; 0 2.7e4 0; 0 0 5e4]*...
sqrt(([depl(1,1) 0 0; 0 depl(1,2) 0; 0 0 depl(1,3)]));
R1=euler(45/180*pi,0,pi);
K1=R1*k*R1';
C1=R1*c*R1';

t1=tenseur(+112,292,-135)/1000;

%%support B
k=kf-[2.7e4 0 0; 0 2.7e4 0; 0 0 5e4]*...
sqrt(([depl(2,1) 0 0; 0 depl(2,2) 0; 0 0 depl(2,3)]));
K2=R1*k*R1';
C2=C1;

t2=tenseur(-235,292,-135)/1000;

%%support C
R2=euler(36/180*pi,0,0);
k=kf-[2.7e4 0 0; 0 2.7e4 0; 0 0 5e4]*...
sqrt(([depl(3,1) 0 0; 0 depl(3,2) 0; 0 0 depl(3,3)]));
K3=R2*k*R2';
C3=R2*c*R2';

```

```

t3=tenseur(112,-208,-135)/1000;

%support D
K4=R2*k*R2';
k=kf-[2.7e4 0 0; 0 2.7e4 0; 0 0 5e4]*...
sqrt(([depl(4,1) 0 0; 0 depl(4,2) 0; 0 0 depl(4,3)]));
C4=C3;
t4=tenseur(-235,-208,-135)/1000;

%% construction des matrices de rigidité
KK1=K1+K2+K3+K4;
KK2=K1*t1'+K2*t2'+K3*t3'+K4*t4';
KK3=(K1*t1')'+(K2*t2')'+(K3*t3')'+(K4*t4')';
KK4=t1*K1*t1'+t2*K2*t2'+t3*K3*t3'+t4*K4*t4';

K22=[KK1 KK2; KK3 KK4];

CC1=C1+C2+C3+C4;
CC2=C1*t1'+C2*t2'+C3*t3'+C4*t4';
CC3=(C1*t1')'+(C2*t2')'+(C3*t3')'+(C4*t4')';
CC4=t1*C1*t1'+t2*C2*t2'+t3*C3*t3'+t4*C4*t4';

C22=[CC1 CC2; CC3 CC4];
%% Résolution

x(i,:)=(K22+C22*j*i-M*(i)^2)\force';

%déplacement (f)
depl(1,:)=abs((R1'*([eye(3) t1]*x(i,:)'))));
depl(2,:)=abs((R1'*([eye(3) t2]*x(i,:)'))));
depl(3,:)=abs((R2'*([eye(3) t3]*x(i,:)'))));
depl(4,:)=abs((R2'*([eye(3) t4]*x(i,:)'))));

```

```

%enmagasine tous les déplacements
depg(i,r,1,:)=abs(depl(1,:));
depg(i,r,2,:)=abs(depl(2,:));
depg(i,r,3,:)=abs(depl(3,:));
depg(i,r,4,:)=abs(depl(4,:));

end

%% cas résonance
y=freq_nat(i,compte)
if y==1
    compte=compte+1;
    depl=squeeze(mean(mean(depg(i-20:i, :, :, :),1),2));
    %% ici si on vient de passer une résonance,...
% on retourne 20/2/pi hz en arriere pour

for res=1:20

    %support A
kf=[1.5e5 0 0; 0 1.5e5 0; 0 0 7.5e5]+[5.6 0 0; 0 5.6 0; 0 0 50]*...
(1000*log((i-res)/2/pi))+[2000 0 0; 0 2000 0; 0 0 12000]*...
(((i-res)/2/pi)^(-.84)*j*(i-res));

k=kf-[2.7e4 0 0; 0 2.7e4 0; 0 0 5e4]*...
sqrt(([depl(1,1) 0 0; 0 depl(1,2) 0; 0 0 depl(1,3)]));
R1=euler(45/180*pi,0,pi);
K1=R1*k*R1';

t1=tenseur(+112,292,-135)/1000;

%support B
k=kf-[2.7e4 0 0; 0 2.7e4 0; 0 0 5e4]*...
sqrt(([depl(2,1) 0 0; 0 depl(2,2) 0; 0 0 depl(2,3)]));
K2=R1*k*R1';

```

```

t2=tenseur(-212,292,-135)/1000;

%support C
R2=euler(36/180*pi,0,0);
k=kf-[2.7e4 0 0; 0 2.7e4 0; 0 0 5e4]*...
sqrt(([depl(3,1) 0 0; 0 depl(3,2) 0; 0 0 depl(3,3)]));
K3=R2*k*R2';

t3=tenseur(112,-208,-135)/1000;

%support D
K4=R2*k*R2';
k=kf-[2.7e4 0 0; 0 2.7e4 0; 0 0 5e4]*...
sqrt(([depl(4,1) 0 0; 0 depl(4,2) 0; 0 0 depl(4,3)]));
t4=tenseur(-212,-208,-135)/1000;

%% construction des nouvelles matrices
KK1=K1+K2+K3+K4;
KK2=K1*t1'+K2*t2'+K3*t3'+K4*t4';
KK3=(K1*t1')'+(K2*t2')'+(K3*t3')'+(K4*t4')';
KK4=t1*K1*t1'+t2*K2*t2'+t3*K3*t3'+t4*K4*t4';

K=[KK1 KK2; KK3 KK4];

%% résolution
x(i-res,:)=(K-M*(i-res)^2)\force';

end
end

end
%calcul de la densité spectrale
depl2(:,:)=(squeeze(sum(abs(depg(:,2,:,:),1)),1))/600/2);

```

end

```

%-----%
%Nom du script : modes.m
%Description : Code permettant de calculer résoudre le
%               problème aux valeurs propres d'un système
%               quasi-linéaire
%Auteur : Joel C.-Lauzon
%Date: sept. 2010
%-----%

clear all

%% Initialisation de la matrice d'inertie
I=[3.8 .07 -.036; .07 1.9 .081; -.036 .081 3];
%matrice d'inertie
M_x=zeros(3,3);Mp=62*eye(3);

M=[Mp M_x;M_x I];
%% calcul des matrices de rigidité et d'amortissement

k=[1.5e5 0 0; 0 1.5e5 0; 0 0 7.5e5];

c=[1/5 0 0; 0 1/5 0; 0 0 1]*700;

R1=euler(45/180*pi,0,pi)
K1=R1*k*R1';
C1=R1*c*R1';
t1=tenseur(112,292,-135)/1000;

%mount 2
K2=R1*k*R1';
C2=R1*c*R1';
t2=tenseur(-235,292,-135)/1000;

```

```

%mount 3
R2=euler(36/180*pi,0,0)
K3=R2*k*R2';
C3=R2*c*R2';
t3=tenseur(112,-208,-135)/1000;

%mount 4
K4=R2*k*R2';
C4=R2*c*R2';
t4=tenseur(-235,-208,-135)/1000;

C1=R1*c*R1';

%mount 2
C2=R1*c*R1';

%mount 3
C3=R2*c*R2';

%mount 4
C4=R2*c*R2';

%% construction des matrices
KK1=K1+K2+K3+K4;
KK2=K1*t1'+K2*t2'+K3*t3'+K4*t4';
KK3=(K1*t1')'+(K2*t2')'+(K3*t3')'+(K4*t4')';
KK4=t1*K1*t1'+t2*K2*t2'+t3*K3*t3'+t4*K4*t4';

K=[KK1 KK2; KK3 KK4];

CC1=C1+C2+C3+C4;
CC2=C1*t1'+C2*t2'+C3*t3'+C4*t4';
CC3=(C1*t1')'+(C2*t2')'+(C3*t3')'+(C4*t4')';
CC4=t1*C1*t1'+t2*C2*t2'+t3*C3*t3'+t4*C4*t4';

C=[CC1 CC2; CC3 CC4];

```



```
%%paramètres dépendant de la fréquence
```

```
Kf=K*50/750;
```

```
Kfc=K/30/100/2/pi;
```

```
cf=-C*.005;
```

```
[a,b]=polyeig(K,C*j+Kfc,-M+cf*j);
```

```
%-----%
%Nom du script : lecturefrf.m
%Description : Code permettant de lire et traiter les
%               resultats frf
%Auteur : Joel C.-Lauzon
%Date: sept. 2010
%-----%
```

```
%% support a
ap=(FFT1_H1_11_1_RMS_Y_Mod*-1).*...
(cosd(FFT1_H1_11_1_RMS_Y_Phas)+j*...
sind(FFT1_H1_11_1_RMS_Y_Phas));
as=(FFT1_H1_12_1_RMS_Y_Mod).*...
(cosd(FFT1_H1_12_1_RMS_Y_Phas)+j*...
sind(FFT1_H1_12_1_RMS_Y_Phas));
al=(FFT1_H1_13_1_RMS_Y_Mod).*...
(cosd(FFT1_H1_13_1_RMS_Y_Phas)+j*...
sind(FFT1_H1_13_1_RMS_Y_Phas));
```

```
Ra=euler(44*pi/180,0,0);
```

```
for i=1:150
A(i, :, :)=Ra*[al(i);as(i);ap(i)];
end
```

```
%% support D (capteurs inversés on utilise c)
```

```
Rc=euler(36*pi/180,0,pi);
```

```
cp=(FFT1_H1_2_1_RMS_Y_Mod).*...
(cosd(FFT1_H1_2_1_RMS_Y_Phas)+j*...
sind(FFT1_H1_2_1_RMS_Y_Phas));
cs=(FFT1_H1_3_1_RMS_Y_Mod).*...
```

```

(cosd(FFT1_H1_3_1_RMS_Y_Phas)+j*...
sind(FFT1_H1_3_1_RMS_Y_Phas));
cl=(FFT1_H1_4_1_RMS_Y_Mod).*...
(cosd(FFT1_H1_4_1_RMS_Y_Phas)+j*...
sind(FFT1_H1_4_1_RMS_Y_Phas));

for i=1:150
D(i, :, :)=Rc*[cl(i);cp(i);cs(i)];
end

Dz=cp*cosd(54)^2+cs*cosd(36)^2;
Dy=cp*sind(54)^2+cs*sind(36)^2;

%% note le capteur b est mort

%%support D
dp=(FFT1_H1_9_1_RMS_Y_Mod*-1).*...
(cosd(FFT1_H1_9_1_RMS_Y_Phas)+j*...
sind(FFT1_H1_9_1_RMS_Y_Phas));
ds=(FFT1_H1_8_1_RMS_Y_Mod*-1).*...
(cosd(FFT1_H1_8_1_RMS_Y_Phas)+j*...
sind(FFT1_H1_8_1_RMS_Y_Phas));
dl=(FFT1_H1_10_1_RMS_Y_Mod*-1).*...
(cosd(FFT1_H1_10_1_RMS_Y_Phas)+j*...
sind(FFT1_H1_10_1_RMS_Y_Phas));

for i=1:150
C(i, :, :)=Rc*[dl(i);ds(i);dp(i)];
end

%% calcul des tenseurs vect.
% attention les positions ne sont
% pas exactement celles des capteurs
B_FL=(tenseur(-154,280,-111)/1000)';

```

```

B_RL=(tenseur(-154,-190,-111)/1000)';

B_RR=(tenseur(85,-190,-111)/1000)';

%% résolution des équations vectorielles
I=eye(3);

M_T=[I B_FL;I B_RL;I B_RR]

for i=1:150
    Modes(i,:)=M_T\[A(i,:) C(i,:) D(i,:)]';
end

freq=FFT1_H1_10_1_RMS_X_Val(1:150);

X=Modes(:,1);Y=Modes(:,2);Z=Modes(:,3);
theta=Modes(:,4);phi=Modes(:,5);alpha=Modes(:,6);

```

```

%-----%
%Nom du script : creation candidats
%Description : Code d'optimisation
%Auteur : Joel C.-Lauzon
%Date: sept. 2010
%-----%

%creation de la première famille

K=4e5+ceil(5e5*rand(80,1));
r=.4*rand(80,1);

K2=4e5+ceil(5e5*rand(80,1));
r2=.4*rand(80,1);

% fct de cout 1re famille
for i=1:80;
    y(i)=opt_correl([K(i) r(i) K2(i) r2(i)]);
end

[a,b]=sort(y);

%Les 5 meilleures solutions

K_meil=K(b(1:5));
r_meil=r(b(1:5));
K2_meil=K(b(1:5));
r2_meil=r(b(1:5));

K_delta=max(K_meil)-min(K_meil);
r_delta=max(r_meil)-min(r_meil);
K2_delta=max(K_meil)-min(K_meil);
r2_delta=max(r_meil)-min(r_meil);

%La Force de la convergence est l'inverse de la dispersion

```

```
Force_r=1/r_delta;  
Force_K=1/K_delta;  
  
%Generation de la deuxieme famille  
  
K_d=min(K_meil)+ceil(K_delta*rand(20,1));  
r_d=min(r_meil)+r_delta*rand(20,1);  
K2_d=min(K2_meil)+ceil(K2_delta*rand(20,1));  
r2_d=min(r2_meil)+r2_delta*rand(20,1);  
  
for j=1:1:20  
    y_d(j)=opt_correl([K_d(j) r_d(j) K2_d(j) r2_d(j)])  
end  
  
%la meilleure solution  
  
[c,d]=min(y_d);
```